

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ФАКТОРИЗАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ГЕМИТРОПНОГО МИКРОПОЛЯРНОГО УПРУГОГО ТЕЛА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В настоящем исследовании рассматривается факторизация характеристического полинома квадратичной энергетической формы гемитропной микрополярной упругой среды. Энергия деформации рассматривается как функция, зависящая от несимметричных тензоров деформации и изгиба-кручения, которые трактуются как термодинамические переменные состояния. Приведено А-представление энергии деформации гемитропной микрополярной упругой среды, характеризующейся 9 изоэнтропийными механическими модулями. Получен характеристический полином алгебраической степени 18 указанной квадратичной формы и проводится его мультипликативное разложение на 4 полинома меньшей алгебраической степени. Вычислены собственные числа и определена их алгебраическая кратность. Получены односторонние ограничения, накладываемые на определяющие константы, обеспечивающие положительную определенность квадратичной формы, и три существенных определяющих неравенства, гарантирующих устойчивость равновесия гемитропного микрополярного упругого тела.

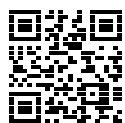
Ключевые слова: энергия деформации, внутренняя энергия, энтропия, устойчивость равновесия, гемитропная микрополярная среда, упругость, диагонализация, каноническая квадратичная форма, положительная определенность, определяющие неравенства

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



для цитирования: Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Факторизация характеристического полинома энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 113–125. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.008. EDN: NEIVZA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

ON A CHARACTERISTIC POLYNOMIAL FACTORIZATION OF THE ENERGY FORM OF A HEMITROPIC MICROPOLAR ELASTIC SOLID

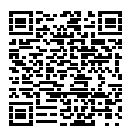
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The present study considers the factorization of the characteristic polynomial of a quadratic energy form of a hemitropic micropolar elastic solid. The strain energy is considered as a function dependent on asymmetric strain and wryness tensors, which are treated as thermodynamic state variables. An A-representation of the strain energy of a hemitropic micropolar elastic medium characterized by 9 isentropic mechanical moduli is presented. A characteristic polynomial of algebraic degree 18 for the given quadratic form is obtained and its multiplicative decomposition into 4 polynomials of lower algebraic degree is obtained. The eigenvalues are calculated and their algebraic multiplicity is determined. One-sided constraints imposed on the constitutive constants ensuring the positive definiteness of the quadratic form and three essential constitutive inequalities required for the equilibrium stability of a hemitropic micropolar elastic solid are established.

Keywords: strain energy, internal energy, entropy, equilibrium stability, hemitropic micropolar medium, elasticity, diagonalization, canonical quadratic form, positive definiteness, constitutive inequalities

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



to cite this article: Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a characteristic polynomial factorization of the energy form of a hemitropic micropolar elastic solid // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 113–125. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.008

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Математическое моделирование механического поведения микрополярных упругих тел начинается с построения энергии деформации [1–10]. Энергия деформации есть внутренняя энергия, поскольку мы ограничиваемся изоэнтропийными (адиабатическими) процессами. Для изотермических процессов энергию деформации следует интерпретировать как свободную энергию Гельмгольца. В большинстве доступных литературных источников внутренняя энергия вводится как термодинамический потенциал состояния на единицу инвариантного объема и обозначается U . В ходе обсуждения рассматриваются только изоэнтропийные процессы. Таким образом, для внутренней энергии имеем

$$U = \bar{U}(\bar{S}, \epsilon_{ij}, \kappa_{ij}), \quad (1)$$

где ϵ_{ij} — несимметричный тензор деформации, κ_{ij} — тензор изгиба-кручения, $\bar{S}$ — энтропия на единицу инвариантного объема, черта над символом относится к термодинамическому потенциалу состояния в отличие от самой физической полевой величины (в (1) это замечание относится к U и S).

Второй (взаимный) принцип Гиббса гласит (см. [11]): «для локального равновесия необходимо и достаточно, чтобы при всех возможных изменениях состояния системы, не меняющих ее энтропии, изменение ее энергии либо обращалось в нуль, либо было положительным: $\delta\bar{U} \geq 0$ ».

Исходная формулировка взаимного принципа может быть аналогично усилена согласно

$$\bar{U}(\bar{S}, \epsilon_{ij}, \kappa_{ij}) \longrightarrow \min \quad (\delta\bar{S} = 0), \quad (2)$$

т.е. поскольку $\delta\bar{S} = 0$, то

$$\begin{aligned} \delta\bar{U} &= 0, \quad \delta^2\bar{U} \geq 0, \\ \delta^2\bar{U} &= 0, \text{ тогда и только тогда, когда } \delta\epsilon_{ij} = 0 \text{ и } \delta\kappa_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу двустороннего ограничения $\delta\bar{U} = 0$, $\bar{U}$ не должна зависеть от линейных членов по вариациям переменных состояния. Это обстоятельство подтверждается простой оценкой приращения внутренней энергии:

$$\bar{U} - \bar{U}\Big|_{\text{equilibrium}} = \delta\bar{U} + \frac{1}{2!}\delta^2\bar{U} + \dots, \quad (4)$$

где первая вариация вычисляется как

$$\delta\bar{U}[\delta\epsilon_{ij}, \delta\kappa_{ij}] = \frac{\partial\bar{U}}{\partial\epsilon_{ij}}\Big|_{\bar{S}=\text{fixed}} \delta\epsilon_{ij} + \frac{\partial\bar{U}}{\partial\kappa_{ij}}\Big|_{\bar{S}=\text{fixed}} \delta\kappa_{ij}, \quad (5)$$

а вторая — определяется выражением

$$\begin{aligned} \delta^2\bar{U}[\delta\epsilon_{ij}, \delta\kappa_{ij}] &= \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\epsilon_{ij}\partial\epsilon_{kl}}\Big|_{\bar{S}=\text{fixed}} \delta\epsilon_{ij}\delta\epsilon_{kl} + \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\epsilon_{ij}\partial\kappa_{kl}}\Big|_{\bar{S}=\text{fixed}} \delta\epsilon_{ij}\delta\kappa_{kl} + \\ &\quad + \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\kappa_{ij}\partial\kappa_{kl}}\Big|_{\bar{S}=\text{fixed}} \delta\kappa_{ij}\delta\kappa_{kl}. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу первой формулы в (3) уравнение (5) преобразуется к виду

$$\overline{U} - \overline{U} \Big|_{\text{equilibrium}} = \frac{1}{2} \delta^2 \overline{U} + \dots \quad (7)$$

Основываясь на взаимном принципе, критерий устойчивости изоэнтропийного равновесия формулируется односторонним ограничением на вторые вариации внутренней энергии $\delta^2 \overline{U}$:

$$\delta^2 \overline{U}(0, 0) [\delta \epsilon_{ij}, \delta \kappa_{ij}] = \delta^2 \overline{U} \Big|_{\epsilon_{ij}=0, \kappa_{ij}=0} [\delta \epsilon_{ij}, \delta \kappa_{ij}] \geq 0, \quad (8)$$

$\delta^2 \overline{U} = 0$, тогда и только тогда, когда $\delta \epsilon_{ij} = 0$ и $\delta \kappa_{ij} = 0$.

В настоящем исследовании широко используется терминология, обозначения, методы и результаты, представленные в наших предыдущих работах [8, 9, 12–17].

1. Энергия деформации гемитропного микрополярного упругого тела. В этом разделе ограничимся рассмотрением в трехмерном пространстве, снабженном декартовой системой координат.

Микрополярное твердое тело называется гемитропным, если компоненты определяющих тензоров не изменяются при поворотах системы координат, т.е. они инвариантны относительно группы полуизометрических преобразований, а именно изометрических преобразований, за исключением зеркальных отражений и инверсий трехмерного евклидова пространства. В этом случае корректная запись основных уравнений может быть представлена только с использованием формализма псевдотензоров. Однако, простой алгоритм преобразования псевдотензора в соответствующий ему абсолютный тензор позволяет нам провести наше исследование в терминах абсолютных тензоров.

Введем энергию деформации $\mathcal{U} \Big|_{\text{adiabatic}}$ [9, 13, 14], рассчитанную на единичный инвариантный элемент объема при постоянной энтропии ($S = \text{const}$), в виде:

$$\overline{U} \Big|_{\text{adiabatic}} = \overline{U} \Big|_{S=\text{const}} = \mathcal{U} \Big|_{\text{adiabatic}} (\epsilon_{(ij)}, \kappa_{(ij)}, \varphi_i, \kappa_i), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \partial_i u_j - e_{ijk} \varphi_k, & 2\epsilon_{(ij)} &= \partial_i u_j + \partial_j u_i, & \kappa_{ij} &= \partial_i \phi_j, \\ \kappa_{(ij)} &= \partial_i \phi_j + \partial_j \phi_i, & \varphi_i &= \phi_i - \frac{1}{2} e_{ikl} \partial_{[k} u_{l]}, & \kappa_i &= \frac{1}{2} e_{ijs} \kappa_{[js]}. \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнениях (5) и (6) используются следующие обозначения: u_i — трансляционные перемещения; ϕ_i — спинорные перемещения; ϵ_{kl} — асимметричный тензор деформации; κ_{kl} — тензор изгиба-кручения; ∂_i обозначает частную производную по пространственной координате x_i ; e_{ijk} — альтернирующий тензор; φ_i — относительные микроповороты; круглые скобки обозначают алгебраическую симметризацию; квадратные скобки обозначают алгебраическое альтернирование.

Следует отметить, что $\mathcal{U}|_{\text{adiabatic}}$ по сути является потенциалом силовых и моментных напряжений. В дальнейшем вместо $\mathcal{U}|_{\text{adiabatic}}$ используется сокращенное обозначение $\mathcal{U}$.

Энергия деформации $\mathcal{U}$ инвариантна относительно вращений и трансляций пространства, а также относительно преобразований пространственной инверсии и зеркальных отражений, т.е. для полной изометрической группы. Существуют три различных подхода к определению энергии деформации, подробно описанные в статье [9]. Первый из них — это А-представление. А-представление [8] основано на понятиях теории рациональных алгебраических инвариантов и является линейной оболочкой индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов несимметричного тензора деформации и пространственного градиента поля микровращений. Основы теории целых рациональных алгебраических инвариантов подробно обсуждаются в фундаментальных монографиях [18, 19].

Инварианты полной неприводимой системы индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических квадратичных инвариантов симметричных компонент несимметричных тензоров деформации, тензора изгиба-кручения и связанных с ними векторов для гемитропного твердого тела, вычисляются в декартовых координатах следующим образом [17]

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_1 &= \delta_{ik}\delta_{lm}\epsilon_{(ik)}\epsilon_{(lm)}, & \mathbb{I}_2 &= \delta_{ik}\delta_{lm}\kappa_{(ik)}\kappa_{(lm)}, & \mathbb{I}_3 &= \delta_{ik}\delta_{lm}\epsilon_{(il)}\epsilon_{(km)}, \\ \mathbb{I}_4 &= \delta_{ik}\delta_{lm}\kappa_{(il)}\kappa_{(km)}, & \mathbb{I}_5 &= \delta_{ik}\varphi_i\varphi_k, & \mathbb{I}_6 &= \delta_{ik}\kappa_i\kappa_k, \\ \mathbb{I}_7 &= \delta_{ik}\delta_{lm}\epsilon_{(ik)}\kappa_{(lm)}, & \mathbb{I}_8 &= \delta_{ik}\delta_{lm}\epsilon_{(ik)}\kappa_{(lm)}, & \mathbb{I}_9 &= \delta_{ik}\kappa_i\varphi_k, \end{aligned} \quad (11)$$

где δ_{lm} — символ Кронекера.

В силу формул (7) для инвариантов $\mathbb{I}_c$ ($c = 1, \dots, 9$) энергия деформации (5) представляется в виде (см. [8, 9, 13]):

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= A_1\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + A_2\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(is)}\kappa_{(lm)} + A_3\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(il)}\epsilon_{(sm)} + \\ &+ A_4\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(il)}\kappa_{(sm)} + A_5\delta_{is}\varphi_i\varphi_s + A_6\delta_{is}\kappa_i\kappa_s + \\ &+ A_7\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(is)}\kappa_{(lm)} + A_8\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(is)}\kappa_{(lm)} + A_9\delta_{is}\kappa_i\varphi_s, \end{aligned} \quad (12)$$

где A_c ($c = 1, \dots, 9$) — произвольные константы. Очевидно, эти константы могут интерпретироваться как определяющие упругие модули (абсолютные скаляры) при спецификации модели гемитропного микрополярного упругого твердого тела.

Для упрощения дальнейшего изложения введем формальные замены независимых переменных состояния $\epsilon_{(ij)}$, $\kappa_{(ij)}$, φ_i , κ_i энергии деформации $\mathcal{U}$ согласно

следующим правилам:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{(11)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{1}}, & \varphi_1 &\longleftrightarrow Y_{\underline{7}}, & \kappa_{(11)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{10}}, & \kappa_1 &\longleftrightarrow Y_{\underline{16}}, \\
\epsilon_{(22)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{2}}, & \varphi_2 &\longleftrightarrow Y_{\underline{8}}, & \kappa_{(22)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{11}}, & \kappa_2 &\longleftrightarrow Y_{\underline{17}}, \\
\epsilon_{(33)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{3}}, & \varphi_3 &\longleftrightarrow Y_{\underline{9}}; & \kappa_{(33)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{12}}, & \kappa_3 &\longleftrightarrow Y_{\underline{18}}; \\
\epsilon_{(23)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{4}}, & & & \kappa_{(23)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{13}}, & & \\
\epsilon_{(13)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{5}}, & & & \kappa_{(13)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{14}}, & & \\
\epsilon_{(12)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{6}}; & & & \kappa_{(12)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{15}}; & &
\end{aligned} \tag{13}$$

где мы подчеркиваем индекс, чтобы отличить двузначные векторные индексы от двух соседних однозначных тензорных индексов. Вектор формальных переменных¹ $[Y]$ принадлежит формальному векторному пространству алгебраической размерности 18.

С учетом замен (9) квадратичная форма энергии деформации (8) записывается как:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} = & \frac{1}{1}AY_{\underline{1}}^2 + \frac{1}{3}AY_{\underline{1}}^2 + \frac{1}{7}AY_{\underline{1}}Y_{\underline{10}} + \frac{1}{8}AY_{\underline{1}}Y_{\underline{10}} + \frac{1}{2}AY_{\underline{10}}^2 + \frac{1}{4}AY_{\underline{10}}^2 + \frac{1}{7}AY_{\underline{1}}Y_{\underline{11}} + \frac{1}{2}AY_{\underline{10}}Y_{\underline{11}} + \\
& + \frac{1}{2}AY_{\underline{11}}^2 + \frac{1}{4}AY_{\underline{11}}^2 + \frac{1}{7}AY_{\underline{1}}Y_{\underline{12}} + \frac{1}{2}AY_{\underline{10}}Y_{\underline{12}} + \frac{1}{2}AY_{\underline{11}}Y_{\underline{12}} + \frac{1}{2}AY_{\underline{12}}^2 + \frac{1}{4}AY_{\underline{12}}^2 + \\
& + \frac{1}{4}AY_{\underline{13}}^2 + \frac{1}{4}AY_{\underline{14}}^2 + \frac{1}{4}AY_{\underline{15}}^2 + \frac{1}{6}AY_{\underline{16}}^2 + \frac{1}{6}AY_{\underline{17}}^2 + \frac{1}{6}AY_{\underline{18}}^2 + \frac{1}{1}AY_{\underline{1}}Y_{\underline{2}} + \frac{1}{7}AY_{\underline{10}}Y_{\underline{2}} + \\
& + \frac{1}{7}AY_{\underline{11}}Y_{\underline{2}} + \frac{1}{8}AY_{\underline{11}}Y_{\underline{2}} + \frac{1}{7}AY_{\underline{12}}Y_{\underline{2}} + \frac{1}{1}AY_{\underline{2}}^2 + \frac{1}{3}AY_{\underline{2}}^2 + \frac{1}{1}AY_{\underline{1}}Y_{\underline{3}} + \frac{1}{7}AY_{\underline{10}}Y_{\underline{3}} + \\
& + \frac{1}{7}AY_{\underline{11}}Y_{\underline{3}} + \frac{1}{7}AY_{\underline{12}}Y_{\underline{3}} + \frac{1}{8}AY_{\underline{12}}Y_{\underline{3}} + \frac{1}{1}AY_{\underline{2}}Y_{\underline{3}} + \frac{1}{1}AY_{\underline{3}}^2 + \frac{1}{3}AY_{\underline{3}}^2 + \frac{1}{8}AY_{\underline{13}}Y_{\underline{4}} + \\
& + \frac{1}{3}AY_{\underline{4}}^2 + \frac{1}{8}AY_{\underline{14}}Y_{\underline{5}} + \frac{1}{3}AY_{\underline{5}}^2 + \frac{1}{8}AY_{\underline{15}}Y_{\underline{6}} + \frac{1}{3}AY_{\underline{6}}^2 + \frac{1}{9}AY_{\underline{16}}Y_{\underline{7}} + \\
& + \frac{1}{5}AY_{\underline{7}}^2 + \frac{1}{9}AY_{\underline{17}}Y_{\underline{8}} + \frac{1}{5}AY_{\underline{8}}^2 + \frac{1}{9}AY_{\underline{18}}Y_{\underline{9}} + \frac{1}{5}AY_{\underline{9}}^2. \tag{14}
\end{aligned}$$

Отметим, что уравнение (10) может быть представлено в компактных матричных обозначениях в виде:

$$\mathcal{U} = [Y]^T[A][Y], \tag{15}$$

где $[Y] = [Y_{\underline{1}}, Y_{\underline{2}}, Y_{\underline{3}}, Y_{\underline{4}}, Y_{\underline{5}}, Y_{\underline{6}}, Y_{\underline{7}}, Y_{\underline{8}}, Y_{\underline{9}}, Y_{\underline{10}}, Y_{\underline{11}}, Y_{\underline{12}}, Y_{\underline{13}}, Y_{\underline{14}}, Y_{\underline{15}}, Y_{\underline{16}}, Y_{\underline{17}}, Y_{\underline{18}}]^T$ — транспонированная вектор-строка алгебраической размерности 18, составленная из формальных переменных; $[A]$ — формальная матрица размерности 18×18 изоэнтропийных механических модулей микрополярной среды. В случае гемитропного микрополярного твердого тела матрица $[A]$ имеет следующую блочную

¹В настоящей статье используются векторно-матричные обозначения. Они отличаются от векторно-тензорных обозначений. Например, $Y \cdot A \cdot Y = [Y]^T[A][Y]$, где квадратные кобки указывают на матрицу или вектор-столбец.

структуру (к сожалению, не диагональную, но по меньшей мере трехдиагональную):

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [0] & [0] & [A_{14}] & [0] & [0] \\ [0] & [A_{22}] & [0] & [0] & [A_{25}] & [0] \\ [0] & [0] & [A_{33}] & [0] & [0] & [A_{36}] \\ [A_{41}] & [0] & [0] & [A_{44}] & [0] & [0] \\ [0] & [A_{52}] & [0] & [0] & [A_{55}] & [0] \\ [0] & [0] & [A_{63}] & [0] & [0] & [A_{66}] \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где $[0]$ — нулевой матричный блок 3×3 ; $[A_{hk}]$ ($h, k = 1, \dots, 6$) — симметричные блочные матрицы алгебраической размерности 3×3 , которые определяются через микрополярные упругие механические модули A_a ($a = 1, \dots, 9$) согласно следующим формулам:

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= \begin{bmatrix} A_1 + A_3 & A_1 & A_1 \\ A_1 & A_1 + A_3 & A_1 \\ A_1 & A_1 & A_1 + A_3 \end{bmatrix}, \quad [A_{44}] = \begin{bmatrix} A_2 + A_4 & A_2 & A_2 \\ A_2 & A_2 + A_4 & A_2 \\ A_2 & A_2 & A_2 + A_4 \end{bmatrix}, \\ [A_{14}] = [A_{41}] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_7 + A_8 & A_7 & A_7 \\ A_7 & A_7 + A_8 & A_7 \\ A_7 & A_7 & A_7 + A_8 \end{bmatrix}, \\ 2[A_{36}] = 2[A_{63}] &= A_9 \operatorname{diag}[1, 1, 1], \quad [A_{25}] = [A_{52}] = A_8 \operatorname{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{22}] &= 2A_3 \operatorname{diag}[1, 1, 1], \quad [A_{33}] = A_5 \operatorname{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{55}] &= 2A_4 \operatorname{diag}[1, 1, 1], \quad [A_{66}] = A_6 \operatorname{diag}[1, 1, 1]. \end{aligned} \quad (17)$$

2. Факторизация характеристического полинома квадратичной энергетической формы. Канонический диагональный вид квадратичной формы (10) может быть представлен в терминах собственных чисел λ_i ($i = 1, \dots, 18$) матрицы $[A]$. В этом случае исходная квадратичная форма, преобразованная к каноническим переменным $X_1, \dots, X_{18}$, принимает каноническое диагональное представление:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\operatorname{diag}} = \sum_{s=1}^{18} \lambda_s X_s^2. \quad (18)$$

Собственные числа симметричной матрицы $[A]$ квадратичной формы $\mathcal{U}$ являются корнями характеристического уравнения, следующего вида:

$$\det [A - \lambda \operatorname{diag}[1, 1, 1]] = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) является уравнением алгебраической степени 18. Причем в силу симметричности матрицы $[A]$ квадратичной формы $\mathcal{U}$ корни уравнения (19) будут вещественными числами. В случае общего линейного анизотропного микрополярного упругого тела аналитическое представление корней в обозримом виде весьма затруднительно, поскольку требует явного определения корней

полинома 18. Однако, для гемитропного микрополярного упругого тела, характеристическое уравнение (19) допускает факторизацию, обусловленную трехдиагональной формой матрицы $[A]$, в следующем виде:

$$\begin{aligned} & [(2A_3 - \lambda)(2A_4 - \lambda) - A_8^2]^3 [4(A_5 - \lambda)(A_6 - \lambda) - A_9^2]^3 [4(A_3 - \lambda)(A_4 - \lambda) - A_8^2]^2 \times \\ & \times [4(3A_1 + A_3 - \lambda)(3A_2 + A_4 - \lambda) - (3A_7 + A_8)^2] = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что уравнение (20) имеет: 4 корня кратности 3, 2 корня кратности 2 и 2 корня кратности 1. Кроме того, что все указанные корни являются корнями, соответствующих квадратных уравнений, и могут быть представлены в явной форме в радикалах:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 &= 2\lambda_2 = 2\lambda_3 = A_3 + A_4 - \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ 2\lambda_4 &= 2\lambda_5 = 2\lambda_6 = A_3 + A_4 + \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ 2\lambda_7 &= 2\lambda_8 = 2\lambda_9 = A_5 + A_6 - \sqrt{(A_5 - A_6)^2 + A_9^2}, \\ 2\lambda_{10} &= 2\lambda_{11} = 2\lambda_{12} = A_5 + A_6 + \sqrt{(A_5 - A_6)^2 + A_9^2}, \\ \lambda_{13} &= \lambda_{14} = A_3 + A_4 - \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ \lambda_{15} &= \lambda_{16} = A_3 + A_4 + \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ 2\lambda_{17} &= 3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 - \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}, \\ 2\lambda_{18} &= 3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 + \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Нетрудно заметить, что все подкоренные выражения в (21) должны быть неотрицательны, что определяется вещественнозначностью собственных чисел симметричной матрицы. Вместе с тем, можно установить дополнительные соотношения между собственными числами в (21):

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 &= 2\lambda_2 = 2\lambda_3 = \lambda_{13} = \lambda_{14}, \\ 2\lambda_4 &= 2\lambda_5 = 2\lambda_6 = \lambda_{15} = \lambda_{16}. \end{aligned} \quad (22)$$

Положительная определенность энергетической квадратичной формы (19) и, тем самым, устойчивость равновесия линейного микрополярного упругого тела [8] обеспечивается следующими очевидными неравенствами

$$\lambda_s > 0 \quad (s = 1, \dots, 18). \quad (23)$$

Учитывая выражения (21) и (22), система неравенств (53) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_3 + A_4 > \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ A_3 + A_4 > -\sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ A_5 + A_6 > \sqrt{(A_5 - A_6)^2 + A_9^2}, \\ A_5 + A_6 > -\sqrt{(A_5 - A_6)^2 + A_9^2}, \\ 3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 > \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}, \\ 3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 > -\sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}. \end{array} \right. \quad (24)$$

Если возвести в квадрат неравенства (54), то останется всего три существенных неравенства, следующих из (54):

$$\begin{aligned} (A_3 + A_4)^2 &> (A_3 - A_4)^2 + A_8^2, \\ (A_5 + A_6)^2 &> (A_5 - A_6)^2 + A_9^2, \\ (3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4)^2 &> (3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2, \end{aligned} \quad (25)$$

которые после несложных преобразований примут вид:

$$\begin{aligned} 4A_3 A_4 &> A_8^2, \\ 4A_5 A_6 &> A_9^2, \\ 4(3A_1 + A_3)(3A_2 + A_4) &> (3A_7 + A_8)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Преобразуем систему неравенств (56) к виду:

$$\begin{aligned} -C_i &< A_8 < C_i, \\ -C_u &< A_9 < C_u, \\ -C_{iii} &< 3A_7 + A_8 < C_{iii}. \end{aligned} \quad (27)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} C_i^2 &= 4A_3 A_4, \\ C_u^2 &= 4A_5 A_6, \\ C_{iii}^2 &= 4(3A_1 + A_3)(3A_2 + A_4). \end{aligned} \quad (28)$$

Система неравенств (58) может трактоваться как 3 двусторонних неравенства или 6 — односторонних. Очевидно, что левые части неравенств в (59) должны быть неотрицательны.

Заключительные обсуждения и выводы. В настоящем исследовании рассмотрена факторизация характеристического полинома квадратичной энергетической формы гемитропной микрополярной упругой среды. Энергия деформации рассматривается как функция, зависящая от несимметричных тензоров деформации и изгиба-кручения, которые трактуются как термодинамические переменные состояния. Кроме того, она может одновременно рассматриваться как потенциал силовых и моментных напряжений. Обсужден второй вариационный принцип Гиббса и применен к формулировке критерия устойчивости равновесия для гемитропного микрополярного упругого твердого тела. Обобщая результаты исследования, приходим к следующим выводам:

- (1) Получено изометрически инвариантное A -представление квадратичной формы энергии деформации гемитропного микрополярного упругого твердого тела, определяемое 9 изоэнтропийными (адиабатическими) механическими модулями.
- (2) Для оперирования с A -представлением введены формальные переменные $Y_1, \dots, Y_{18}$.
- (3) Получен характеристический полином алгебраической степени 18 энергетической квадратичной формы в терминах $Y_1, \dots, Y_{18}$. Построено мультипликативное разложение характеристического полинома на 4 полинома меньшей степени.
- (4) Вычислены собственные числа и определена их алгебраическая кратность.
- (5) Найдены ограничения на определяющие механические модули, обеспечивающие таким образом положительную определенность квадратичной формы энергии деформации и устойчивость равновесия микрополярного упругого твердого тела.
- (6) Для гемитропной микрополярной среды определены три существенных определяющих неравенства, обеспечивающих устойчивость равновесия исследуемого тела.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124013000674-0).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124013000674-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E. M. P., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – VI+226.
2. Kessel S. *Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-kontinuums* // *Abhandlungen der Braunschweig. Wiss. Ges.* – 1964. – Т. 16. – С. 1–22.
3. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. – Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. – viii+383.
4. Neuber H. *Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper* // *Acta Mechanica*. – 1966. – Т. 2. – С. 48–69. – DOI: 10.1007/BF01176729.
5. Neuber H. *On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua* // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964*. – Springer. 1966. – С. 153–158. – DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
6. Neuber H. *On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua* // *Mechanics of Generalized Continua* / под ред. E. Kröner. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. – С. 109–113.
7. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. – xv+345. – (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
8. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. – 2018. – Т. 22, вып. 3. – С. 504–517. – DOI: 10.14498/vsgtu1635.
9. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. – 2022. – 3(53). – С. 86–100. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
10. Besdo D. *A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum* // *Acta Mechanica*. – 1974. – Т. 20. – С. 105–131.
11. Gibbs J. *On the equilibrium of heterogeneous substances* // *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*. – 1875. – Т. 3. – 108–248 and 343–524.
12. Радаев Ю., Мурашкин Е. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2020. – Т. 82, № 4. – С. 399–412. – DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
13. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. – 2022. – 4(54). – С. 108–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
14. Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. – 2023. – 1(55). – С. 110–121. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
15. Murashkin E. V., Radayev Y. N. *A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity* // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. –

- Russian Federation, 2023. – T. 44, № 6. – С. 2440–2449. – DOI: 10.1134 / s1995080223060392.
16. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2024. – T. 45, № 5. – С. 2378–2390. – DOI: 10.1134 / s1995080224602480.
 17. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2025. – T. 46, № 5. – С. 2391–2400. – DOI: 10.1134 / S1995080225606514.
 18. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. – М., Л. : ГИТТЛ, 1948. – 408 с. – [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
 19. Спенсер Э. Теория инвариантов. – Мир, 1974.

REFERENCES

1. *Cosserat E. M. P., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – VI+226.
2. *Kessel S.* Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-kontinuums // Abhandlungen der Braunschweig. Wiss. Ges. – 1964. – Vol. 16. – P. 1–22.
3. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. – Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. – viii+383.
4. *Neuber H.* Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. – 1966. – Vol. 2. – P. 48–69. – DOI: 10.1007/BF01176729.
5. *Neuber H.* On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964. – Springer. 1966. – P. 153–158. – DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
6. *Neuber H.* On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / ed. by E. Kröner. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. – P. 109–113.
7. *Dyzlewicz J.* Micropolar Theory of Elasticity. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. – xv+345. – (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
8. *Radaev Y. N.* The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. – 2018. – Vol. 22, iss. 3. – P. 504–517. – DOI: 10.14498/vsgtu1635.
9. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* On Two Main Natural Forms of the Potential of Asymmetric Tensors of Force and Couple Stresses in the Mechanics of Hemitropic Solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2022. – 3(53). – P. 86–100. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
10. *Besdo D.* A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. – 1974. – Vol. 20. – P. 105–131.
11. *Gibbs J. W.* On the equilibrium of heterogeneous substances // Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences. – 1875. – Vol. 3. – 108–248 and 343–524.

12. *Radaev Y. N., Murashkin E. V.* Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of strength and ductility. – 2020. – Vol. 82, no. 4. – P. 399–412. – DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
13. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Reducing Natural Forms of Hemitropic Energy Potentials to Conventional Ones // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2022. – 4(54). – P. 108–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
14. *Murashkin E. V.* On the Relationship Between Micropolar Constitutive Parameters of Thermodynamic Potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2023. – 1(55). – P. 110–121. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
15. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2023. – Vol. 44, no. 6. – P. 2440–2449. – DOI: 10.1134/s1995080223060392.
16. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2024. – Vol. 45, no. 5. – P. 2378–2390. – DOI: 10.1134/s1995080224602480.
17. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2025. – Vol. 46, no. 5. – P. 2391–2400. – DOI: 10.1134/s1995080225606514.
18. *Gurevich G. B.* Fundamentals of the Theory of Algebraic Invariants. – Moscow : GITTL, 1948. – 408 p.
19. *Spencer E.* Invariant theory. – Moscow : Mir, 1974.