

Р. И. Непершин

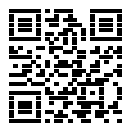
СДАВЛИВАНИЕ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ ПУАНСОНАМИ С ГЛАДКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”,
Москва, Россия

Аннотация. Приведено численное моделирование поперечного сдавливания идеально пластической полосы двумя пуансонами с гладкой криволинейной цилиндрической границей при плоской деформации. Рассматривается изменение пластической области от вдавливания пуансонов в полупространство с увеличением контактной границы, переходящее в деформацию по толщине толстой полосы при заданной длине границе контакта, с последующим уменьшением контактной границы вследствие увеличения скорости перемещения свободных жестких концов полосы до контакта пуансонов в центре полосы. Моделирование представляет практический интерес для оценки предельной нагрузки при поперечном вдавливании в толстую полосу штампов с выпуклой криволинейной цилиндрической границей, и образовании цилиндрических каналов с криволинейной образующей в толстой плоской заготовке на кузнечно-прессовом оборудовании.

Ключевые слова: толстая полоса, идеальная пластичность, плоская деформация, поперечное сдавливание, гладкий пуансон, криволинейная граница контакта, линии скольжения, годограф скоростей, контактное давление.

Непершин Ростислав Иванович, доктор технических наук, профессор;
e-mail: nepershin_ri@rambler.ru; AuthorID: 109974



для цитирования: Непершин Р. И. Сдавливание идеально пластической полосы пуансонами с гладкой криволинейной границей // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 137–158. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.010. EDN: SPBWNX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

R. I. Nepershin

IDEAL PLASTIC STRIP COMPRESSION BY THE PUNCHES WITH SMOOTH CURVILINEAR BOUNDARY

Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia

Abstract. Computer simulation of the rigid-plastic strip transverse compression by the two punches with smooth curvilinear cylindrical boundaries is presented using plane strain ideal plastic theory. Increase of plastic region and contact boundary during the punch penetration in-to plastic half-space at the initial stage followed by plastic region penetration through the strip thickness with specified punch contact boundary at the second stage, and decrease of contact boundary up to upper and lower punches contact with velocity increase of rigid strip regions at the final stage are considered. The computer simulation can be used for the limit loads estimation of transverse plastic penetration of the punches with curvilinear cylindrical boundaries into thick strips, and for plastic forming of curvilinear transverse channels in thick slab on the press-forging equipment.

Keywords: thick strip, ideal plasticity, plane strain, transverse compression, smooth punch, curved contact boundary, slip lines, velocity hodograph, contact pressure.

Rostislav I. Nepershin, Doctor of Technical Sciences, Professor; e-mail: nepershin_ri@rambler.ru; AuthorID: 109974



to cite this article: Nepershin R. I. Ideal plastic strip compression by the punches with smooth curvilinear boundary // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 137–158. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.010

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В начальный период развития математической теории пластичности, основанной на гиперболических дифференциальных уравнениях плоской деформации, получены аналитические решения фундаментальных задач о несущей способности пластического полупространства при давлении плоского штампа и сдавливании пластического слоя Прандтля; вдавливании клина в пластическое полупространство и несущей способности пластического клина при давлении плоского штампа [1, 2]. Пластическая область при сдавливании толстой полосы плоскими штампами по Прандтлю определяется прямолинейными и круговыми линиями скольжения около штампа и криволинейными линиями скольжения при решении смешанной задачи на оси симметрии численными методами, или решением телеграфного уравнения на плоскости характеристик.

Эти решения относятся к статически определимым задачам плоской деформации: линии скольжения вычисляются по уравнениям Генки с граничными условиями для напряжений с последующим вычислением поля скоростей по уравнениям Гейрингер при удовлетворении условиям несущей способности жесткой области и положительности диссипативной функции в пластической области [3].

В [2, 4] приведены решения кинематически определимой задачи о пластическом течении при вдавливании штампа с выпуклой криволинейной границей в толстую идеально пластическую полосу. В этом случае неизвестное распределение контактного давления на границе штампа определяется на годографе скоростей по условию непрерывности нормальной скорости на контактной границе, а затем вычисляются линии скольжения на физической плоскости решением статически определимых задач Коши и смешенного типа. В [2] годограф скоростей и линии скольжения находятся численным интегрированием дифференциальных уравнений на плоскости характеристик. В [4] решается телеграфное уравнение для скоростей и кривизны линий скольжения на плоскости характеристик с последующими вычислениями координат линий скольжения на физической плоскости.

В настоящей работе приводится численное моделирование плоского пластического течения при поперечном вдавливании в толстую полосу двух пуансонов с гладкой эллиптической, гиперболической и параболической цилиндрическими границами контакта с пластической областью. На первой стадии используется решение задачи о вдавливании пуансонов с гладкой выпуклой границей в пластическое полупространство. Линии скольжения и годограф скоростей вычисляются по алгоритму численного решения статически определимой задачи о вдавливании кругового и эллиптического цилиндров [5, 6] с использованием численных процедур решения основных краевых задач гиперболических уравнений идеальной пластичности при плоской деформации [7].

Переход ко второй стадии вдавливания определяется равенством контактного давления, зависящего от отношения толщины полосы к ширине горизонтальной проекции границы контакта, и давления пуансонов на первой стадии при

увеличении длины контактной границы до предельного значения при вырождении угла веера в сингулярной точке линий скольжения. Линии скольжения на плоскости годографа скоростей с граничными условиями непрерывности нормальной скорости на границе контакта и разрывом скорости на жесткопластической границе в центре полосы определяют распределение контактного давления с последующими вычислениями линий скольжения на физической плоскости решением задачи Коши от контактной границы и смешанного типа при заданной длине границы контакта. Глубина вдавливания пуансонов на второй стадии ограничена вырождением веера линий скольжения в сингулярной точке на границе контакта.

Третья стадия вдавливания моделируется линиями скольжения с непрерывным полем скоростей пластического течения при отношении горизонтальной проекции контактной границы к толщине пластического слоя на конце границы контакта больше единицы. На третьей стадии при большой длине или большой кривизне контактной границы происходит уменьшение длины контактной границы, ограниченной контактом верхнего и нижнего пуансонов в центре полосы, вследствие высокой скорости перемещения свободной жесткой области полосы.

1. Контактная граница. При сдавливании полосы шириной B и толщиной $2H$ двумя пуансонами по нормали к границам полосы имеют место две ортогональные плоскости симметрии. При условии $2H \ll B$ в нормальном сечении к цилиндрической границе контакта принимаем условие плоской пластической деформации, зависящей от глубины вдавливания s относительно поверхности полосы.

Образующую контактной границы задаем каноническими уравнениями эллипса, сопряженной гиперболы и параболы, смещенными по оси y на расстояние $H - s$ от центра O и начальной точкой контакта $s = 0$, $y = H$, $x = 0$ в первом квадранте плоскости x, y нормального сечения полосы

$$\text{эллипс} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y + s - H - 1)^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

$$\text{сопряженная гипербола} \quad \frac{(y + s - H - 1)^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad (2)$$

$$\text{парабола} \quad y = ax^2 + H - s, \quad (3)$$

где a и b – полуоси эллипса и гиперболы по направлениям осей координат x и y ; параметр a в уравнении параболы равен обратной величине удвоенного фокального расстояния $2p$.

За единицу длины принимаем значения b и $2p$ для эллипса, гиперболы и параболы, соответственно. При вычислении линий скольжения и годографа скоростей за единицу напряжений и скоростей принимаем удвоенную пластическую постоянную $2k$ и скорость V вдавливания пуансона по нормали к границе полосы относительно центра O .

Первая стадия. На рис. 1 показаны линии скольжения в пластической области на первой стадии вдавливания пуансона с гладкой границей контакта. Вследствие малой длины границы контакта O_1A по сравнению с полутолщиной полосы H пластическое течение приводит к выдавливанию материала на поверхность полосы с образованием свободной границы AB с главными напряжениями $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$ по нормали и касательной к этой границе. Линии скольжения ξ пересекают гладкую границу O_1A и границу AB с углами наклона касательной $\varphi = -\pi/4 + \alpha$ и $\varphi = \pi/4 + \beta$; где $\alpha \geq 0$ и $\beta \leq 0$ – углы наклона касательной к границам O_1A и AB . При заданном значении угла α_A в точке A на границе контакта угол β_A связан с углом веера η линий скольжения ψ соотношением

$$\beta_A = \psi + \alpha_A - \pi/2. \quad (4)$$

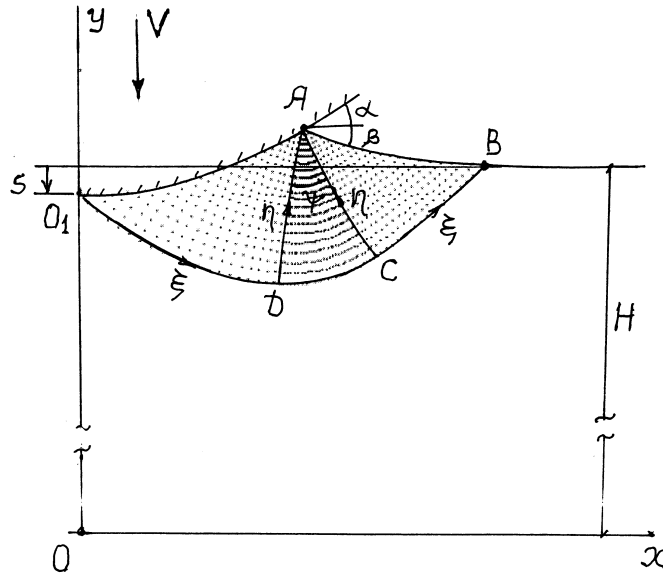


Рис. 1. Линии скольжения на первой стадии вдавливания пуансона.

Границу AB находим интегрированием дифференциального соотношения $dy/dx = \operatorname{tg} \beta$ и угол β задаем степенной функцией координаты x

$$\beta = \beta_A[(x - x_A)^m - 1], \quad x_A \leq x \leq x_B, \quad (5)$$

где $m < 1$ – заданный параметр.

На границе AB известны углы наклона касательной ξ линий скольжения $\varphi = -\pi/4 + \alpha$ и среднее напряжение $\sigma = -1/2$, которые определяют линии

скольжения и напряжения в области ABC решением задачи Коши с соотношениями Генки для σ и φ . Затем решается задача Гурса в области ACD с вырожденной η линией скольжения в точке A с углом веера ψ и задача смешанного типа в области ADO_1 на гладкой границе контакта O_1A с определением контактного давления $p = -\sigma + 1/2$. Годограф скоростей определяется условиями непрерывности нормальной компоненты скорости на контактной границе O_1A и на жесткопластической границе O_1B с разрывом скорости $[V] = \sqrt{2}$. В области ADO_1 решается задача смешанного типа и задача Гурса с вычислением скоростей V_ξ, V_η по уравнениям Гейрингер в области $ADCB$ и на границе AB с контролем положительности диссипативной функции.

Напряжения и скорости в пластической области зависят от кривизны границы O_1A и от сингулярной точки A . Неоднородность полей напряжений и скоростей на физической плоскости и на годографе скоростей выражается концентрацией точек пересечения линий скольжения при вычислениях с постоянным шагом по углу $\Delta\varphi$ в точке A и по углу наклона касательной $\Delta\alpha$ на границе A , на которой координаты точек вычисляются в зависимости от угла α , при $b = 1$ в уравнениях (1) и (2)

$$\text{эллипс : } x = a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}, \quad y = 1 + H - s - (1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}, \quad (6)$$

сопряженная гипербола :

$$x = a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 - a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}, \quad y = H - s - 1 + (1 - a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}, \quad (7)$$

$$\text{парабола : } x = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2a}, \quad y = ax^2 + H - s. \quad (8)$$

Параметры линий скольжения ψ и x_B определяются варьированием в исходных данных вычислительной программы по условиям $x = 0$ в точке O_1 и равенству площадей сегмента сечения цилиндра ниже границы полосы и пластической области выше границы полосы. В [5, 6] приведен алгоритм вычислений линий скольжения и годографа скоростей при вдавливании кругового и эллиптического цилиндра.

Результаты численного моделирования при вдавливании гладкого кругового цилиндра [5] показывают, что при малых углах контакта $\alpha_A \rightarrow 0$, $\psi \rightarrow \pi/2$, угол β_A и $s \rightarrow 0$, контактное давление приближается к значению $1 + \pi/2$ для плоского штампа Прандтля. Угол веера линий скольжения ψ вырождается при $\alpha_A \approx 0.8$, среднем контактном давлении $q = 1.938$ и глубине вдавливания $s = 0.311$.

На рис. 2 и 3 показаны линии скольжения с распределениями контактного давления и годографы скоростей для $\alpha_A = 0.5$ и $s = 0.092$ и 0.035 при вдавливании пуансонов с гиперболической и параболической границами. Около пуансона образуется вогнутая свободная граница пластической области AB с углом наклона касательной β_A в точке A , что приводит к уменьшению угла веера линий скольжения ψ и нормального давления $p_A = 1 + \psi$ в точке A с увеличением до

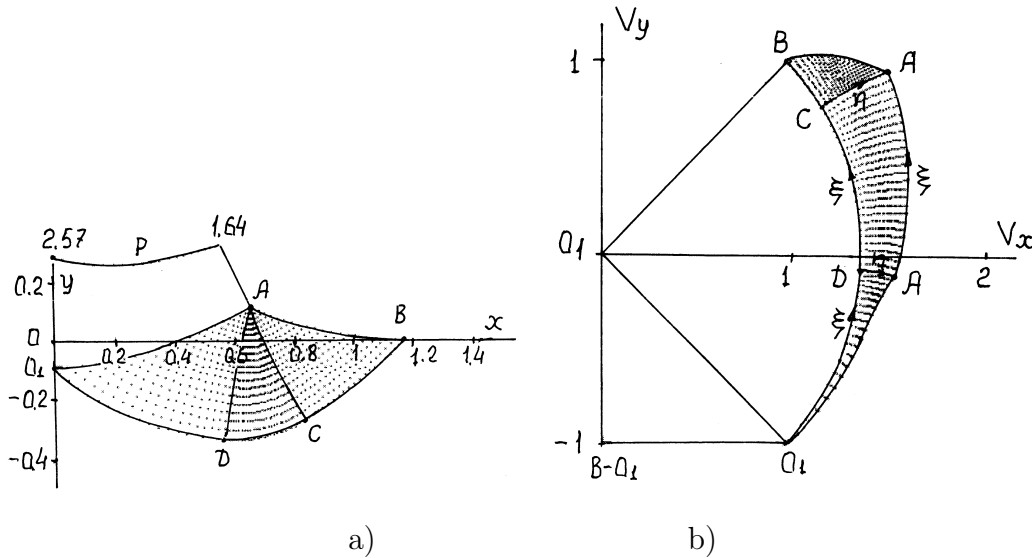


Рис. 3. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на первой стадии вдавливания параболического пуансона.

является кинематически определимой [2], в которой распределение среднего напряжения σ на контактной границе O_1A определяется на плоскости годографа скоростей (рис. 4б) по условию непрерывности нормальной скорости к границе контакта

$$V_y = \operatorname{tg} \alpha V_x - 1, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_A. \quad (9)$$

Затем вычисляются линии скольжения на физической плоскости (рис. 4а) решением задачи Коши с известными значениями σ и $\varphi = -\pi/4 + \alpha$ на границе O_1A , задачи Гурса в области ABE с сингулярной точкой A и смешанного типа в области O_1BO при $\varphi = -\pi/4$ на линии симметрии. Среднее напряжение σ_0 в центре O определяется из равенства нулю горизонтальной силы на жесткопластической границе $A-O$.

В [2] линии скольжения на физической плоскости и на плоскости годографа скоростей находятся численным интегрированием дифференциальных уравнений на плоскости характеристик ξ, η . В настоящей работе задача решается численным интегрированием дифференциальных уравнений линий скольжения ξ, η на плоскости годографа скоростей с соотношениями Генки для σ и φ

$$\frac{dV_y}{dV_x} = -\operatorname{ctg} \varphi \quad \text{для } \xi, \quad \frac{dV_y}{dV_x} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{для } \eta, \quad (10)$$

$$d\sigma - d\varphi = 0 \quad \text{вдоль } \xi, \quad d\sigma + d\varphi = 0 \quad \text{вдоль } \eta, \quad (11)$$

Таблица 1. Вдавливание пуансона с эллиптической границей контакта в пластическое полупространство

α_A	$-\beta_A$	ψ	x_A	x_B	s	q
$a = 1/3$						
0.2	0.123	1.245	0.023	0.050	0.001	2.404
0.3	0.203	1.068	0.034	0.064	0.002	2.344
0.4	0.294	0.877	0.046	0.085	0.005	2.253
0.5	0.410	0.661	0.060	0.107	0.009	2.098
0.6	0.521	0.450	0.074	0.130	0.014	2.010
0.7	0.664	0.207	0.090	0.154	0.017	1.996
$a = 1$						
0.2	0.128	1.243	0.199	0.380	0.015	2.383
0.3	0.199	1.072	0.295	0.556	0.021	2.355
0.4	0.286	0.885	0.389	0.715	0.037	2.235
0.5	0.371	0.700	0.479	0.866	0.068	2.144
0.6	0.476	0.495	0.565	0.999	0.079	2.105
0.7	0.591	0.280	0.644	1.115	0.105	2.015
$a = 3$						
0.2	0.116	1.255	1.559	3.011	0.071	2.455
0.3	0.179	1.092	2.041	3.835	0.124	2.345
0.4	0.230	0.941	2.356	4.372	0.173	2.298
0.5	0.273	0.798	2.561	4.725	0.214	2.282
0.6	0.322	0.649	2.697	4.905	0.241	2.230
0.7	0.357	0.514	2.790	5.044	0.268	2.207

с последующим численным интегрированием дифференциальных уравнений линий скольжения на физической плоскости

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{для } \xi, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi \quad \text{для } \eta. \quad (12)$$

Система уравнений (10), (11) замкнута для переменных V_x , V_y , σ , φ на плоскости годографа скоростей. При решении элементарной задачи Коши с известными значениями V_x , V_y , σ , φ в двух точках контура Коши на ξ и η линиях скольжения из соотношений (11) находим σ и φ в точке пересечения линий скольжения. Затем из линейной системы конечно-разностных уравнений (10) при средних значениях углов φ вдоль ξ и η линий скольжения находим V_x , V_y – координаты линий скольжения на плоскости годографа скоростей.

Область OBO_1 на плоскости годографа определяется равенством потоков скорости при вдавливании пуансона со скоростью $V = -1$ по оси y и перемещении жесткой области полосы по оси x со скоростью $V_1 = x_A/y_A$ аналогично задаче о вдавливании плоского штампа. В центре O возникает разрыв скорости вдоль жесткопластической границы OBA , равный $\sqrt{2}$, который отображается

Таблица 2. Вдавливание пуансона с гиперболической и параболической границами контакта в пластическое полупространство

α_A	$-\beta_A$	ψ	x_A	x_B	s	q
Гипербола, $a = 1$						
0.1	0.061	1.410	0.101	0.199	0.005	2.453
0.2	0.128	1.243	0.207	0.398	0.010	2.433
0.3	0.210	1.061	0.325	0.611	0.025	2.343
0.4	0.309	0.862	0.466	0.847	0.051	2.190
0.5	0.433	0.638	0.652	1.166	0.092	2.134
0.6	0.609	0.362	0.938	1.619	0.176	1.976
0.65	0.718	0.203	1.170	1.985	0.257	1.891
Парабола, $a = 1$						
0.1	0.062	1.409	0.050	0.098	0.001	2.462
0.2	0.124	1.243	0.101	0.195	0.005	2.439
0.3	0.208	1.069	0.155	0.789	0.011	2.322
0.4	0.297	0.874	0.211	0.387	0.021	2.235
0.5	0.399	0.672	0.273	0.491	0.035	2.164
0.6	0.536	0.435	0.372	0.596	0.054	1.976
0.7	0.691	0.180	0.421	0.713	0.080	1.926

круговой η линией скольжения OBA , и напряжение σ определяется вторым соотношением в (11) с точностью до σ_0 в центре O . В области OBO_1 переменные $V_x, V_y, \sigma, \varphi$ находим решением смешанной задачи по известным значениям на η линии скольжения OB и граничным условиям $\varphi = -\pi/4, V_x = 0$ на оси y численным интегрированием уравнений (10), (11) при конечно-разностной аппроксимации первого уравнения (10). Координаты точки B на круговой η линии скольжения OB и угол веера ψ_1 до ξ линии скольжения AB находим по условию $V_y = -1$ в точке O_1 при вычислении линии скольжения O_1B .

Скорости в области O_1BA с сингулярной точкой A на плоскости годографа вычисляем по условию (9). Угол наклона вектора скорости γ относительно скорости пуансона $(0, -1)$ в точках годографа (V_x, V_y) определяется уравнением $\operatorname{tg} \gamma = (1 + V_y)/V_x$ и условие непрерывности нормальной скорости (9) на границе O_1A имеет вид $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \gamma$. Равенство $\alpha = \varphi + \pi/4$ приводит к уравнению для угла φ на границе O_1A при $0 \leq \alpha \leq \alpha_A$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \gamma - 1}{1 + \operatorname{tg} \gamma}. \quad (13)$$

Выше границы O_1A углы γ и α удовлетворяют неравенству $\alpha < \gamma$, из которого следует неравенство для разности левой и правой части уравнения (13) на ξ линиях скольжения над границей O_1A на плоскости годографа скоростей

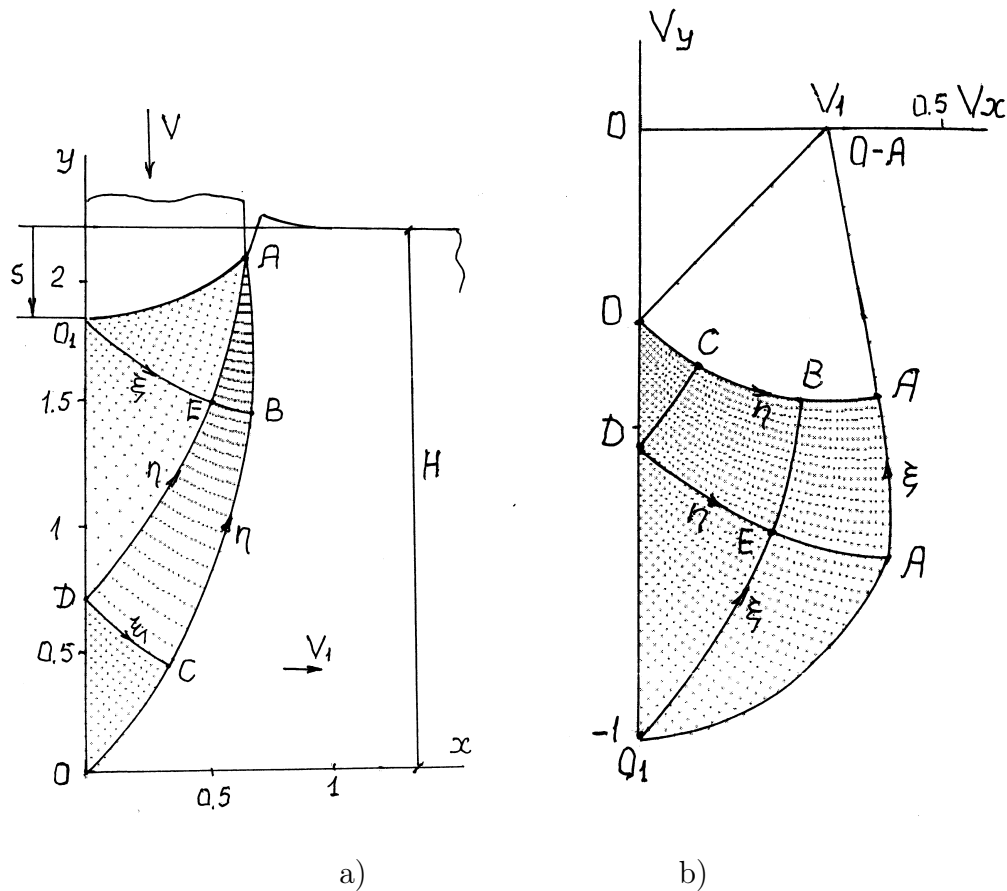


Рис. 4. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на второй стадии вдавливания кругового пуансона.

(рис. 4b)

$$f = \operatorname{tg} \varphi + \frac{1 - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \gamma} < 0, \quad (14)$$

при $f = 0$ на границе O_1A на ξ линиях скольжения, и $f > 0$ ниже этой границы. Изменение знака функции f используем для вычисления σ , φ и углов наклона касательной α на границе O_1A по следующему алгоритму.

Линии скольжения в области O_1BA находим решением задачи Гурса по известным значениям V_x , V_y , σ , φ на ξ линии скольжения BO_1 и на круговой η линии скольжения BA . На линиях скольжения находим точки i и $i + 1$, между которыми произведение функций $f_i f_{i+1}$ меняет знак, и при $f = 0$ на границе O_1A линейной интерполяцией находим V_x , V_y , σ , φ и угол $\alpha = \varphi + \pi/4$. Угол вера ψ_2 до ξ линии скольжения AA на плоскости годографа находим по условию $\alpha = \alpha_A$ при $0 \leq \alpha \leq \alpha_A$ на границе O_1A .

Затем на границе O_1A находим $\varphi = \alpha - \pi/4$, координаты x, y , и вычисляем линии скольжения на плоскости x, y решением задачи Коши в области O_1AE , смешанного типа в области O_1ED , Гурса в области $ABCDE$ с углом веера η линий скольжения $\psi = \psi_2 - \psi_1$ в точке A , и задачи смешанного типа в области DCO .

Погрешность вычисления линий скольжения при заданных значениях H и угла контакта α_A составляла $|y| \sim 10^{-3}$. После вычисления линий скольжения определяется жесткопластическая граница $O-A$. Условие равновесия жестких концов полосы по оси x и соотношения для нормального и касательного напряжений $\sigma = \sigma_0 - (\pi/4 + \varphi)$, $\tau = 1/2$ на жесткопластической границе $O-A$ приводят к уравнению для среднего напряжения в центре O

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\int_0^{y_A} \varphi dy + x_A/2}{y_A}, \quad (15)$$

при напряжении $\sigma_1 = \sigma_0 + 1/2 > 0$ по оси x в окрестности центра O , переходящие в напряжения сжатия при приближении к контактной границе O_1A .

На рис. 5, 6, 7 показаны линии скольжения и годографы скоростей на второй стадии вдавливания пуансонов с гладкой контактной границей при $\alpha_A = 0.5$: с параметрами $a = 3$ для эллипса и $a = 1$ для гиперболы и параболы для отношений $y_A/x_A = 2.69, 6.08$ и 5.27 , соответственно. В табл. 3 приведены зависимости контактного давления p от угла наклона касательной α к границам контакта O_1A . Значения среднего давления $q = 1.375, 2.125$ и 1.980 на этих границах близки к давлениям на первой стадии вдавливания при $\alpha_A = 0.5$. Отношения y_A/x_A определяют предельный угол веера ψ линий скольжения в точке A и полутолщину полосы H при переходе от первой стадии вдавливания ко второй. При постоянном значении α_A и увеличении глубины вдавливания значения $y_A/x_A, q$ и ψ уменьшаются. Нижний предел для линий скольжения второй стадии, отношение y_A/x_A и перемещение пуансона s_2 определяются при снижении угла веера ψ в точке до нуля.

Таблица 3. Давление p на контактной границе O_1A при $\alpha_A = 0.5$ для линий скольжения на рис. 5а, 6а, 7а

рис. 5а		рис. 6а		рис. 7а	
α	p	α	p	α	p
0.000	1.392	0.000	2.162	0.000	2.013
0.075	1.389	0.076	2.159	0.076	2.010
0.154	1.382	0.155	2.152	0.155	2.003
0.237	1.372	0.240	2.140	0.240	1.991
0.325	1.356	0.332	2.121	0.331	1.972
0.417	1.336	0.429	2.096	0.427	1.948
0.500	1.317	0.500	2.075	0.500	1.927

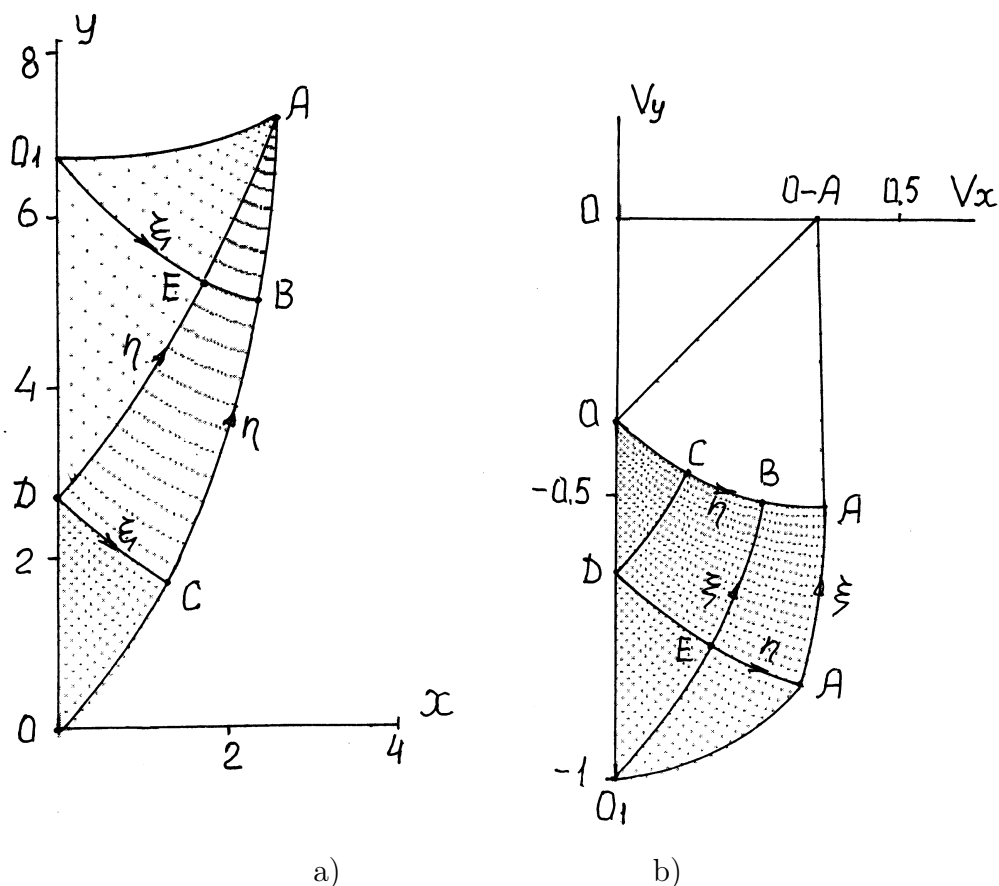


Рис. 5. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на второй стадии вдавливания эллиптического пуансона.

В табл. 4 и 5 приведены зависимости давления q при $\alpha_A = 0.7$ на второй стадии вдавливания от координаты y_A и отношения y_A/x_A для эллиптической, гиперболической и параболической границы контакта O_1A . Давления q для угла $\alpha_A = 0.7$ при максимальных значениях y_A/x_A выше значений q при вдавливании пуансонов на первой стадии. Минимальные значения q вычислены для малых углов веера ψ линий скольжения при приближении отношения y_A/x_A к двум.

Третья стадия. При отношениях $y_A/x_A \leq 1$ увеличивается скорость перемещения жестких концов полосы, и при выполнении неравенства $\operatorname{tg} \alpha_A > ds/dx$ происходит уменьшение длины границы контакта и угла наклона касательной α_A в точке A до контакта верхнего и нижнего пуансонов в центре полосы при $s = H$. Пластическая область уменьшается с уменьшением угла α_A и границы контакта и моделируется линиями скольжения с непрерывным полем скоростей.

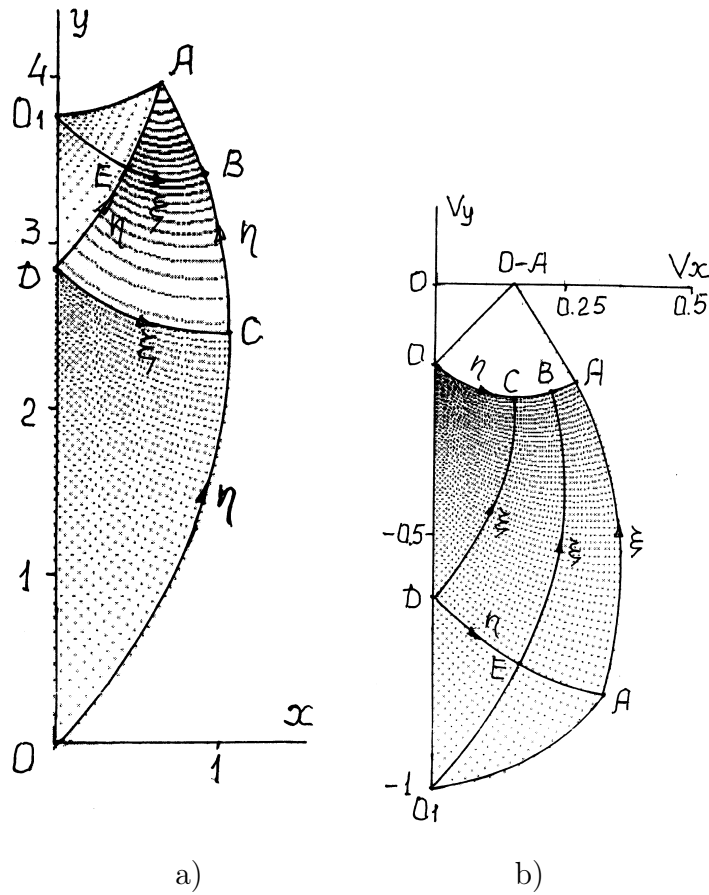


Рис. 6. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на второй стадии вдавливания гиперболического пуансона.

На рис. 8 показаны линии скольжения и годограф скоростей на третьей стадии при вдавливании кругового пуансона с параметрами $\alpha_A = 0.5$ и $y_A/x_A = 0.777$. В области O_1BO имеет место однородное напряженное состояние $\sigma_0 = \text{const}$, $\varphi = -\pi/4$ и линейное распределение скоростей

$$V_x = \frac{x}{x_B}, \quad 0 \leq x \leq x_B, \quad V_y = -\frac{y}{y_{O_1}}, \quad x_B = y_{O_1}. \quad (16)$$

В области O_1AB линии скольжения ξ прямые с постоянными значениями $\varphi = -\pi/4 + \alpha$ и $\sigma = \sigma_0 - \alpha$, определяемыми по соотношениям (11). Нормальное давление на границе контакта O_1A определяется линейной зависимостью от угла α

$$p = \frac{1}{2} + \alpha - \sigma_0, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_A. \quad (17)$$

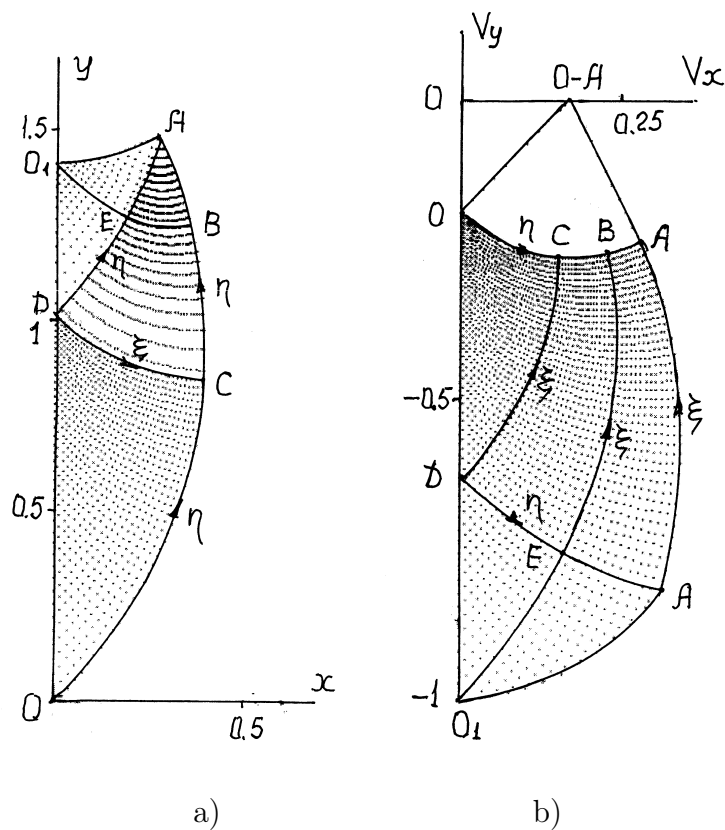


Рис. 7. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на второй стадии вдавливания параболического пуансона.

Таблица 4. Давление q на эллиптической границе контакта $\alpha_A = 0.7$. Вторая стадия

$a = 1/3, x_A = 0.09$			$a = 1, x_A = 0.644$			$a = 3, x_A = 2.79$		
y_A	y_A/x_A	q	y_A	y_A/x_A	q	y_A	y_A/x_A	q
0.192	2.130	1.179	1.372	2.130	1.181	5.925	2.124	1.195
0.217	2.408	1.255	1.551	2.408	1.256	6.668	2.391	1.272
0.251	2.786	1.325	1.742	2.704	1.343	7.495	2.687	1.358
0.279	3.096	1.457	2.011	3.122	1.456	8.644	3.099	1.472
0.325	3.608	1.575	2.316	3.595	1.579	9.960	3.571	1.594
0.428	4.757	1.842	2.667	4.140	1.709	11.47	4.112	1.724
0.483	5.356	1.954	3.439	5.338	1.959	13.21	4.735	1.861
0.556	6.172	2.101	3.963	6.152	2.106	14.79	5.302	1.975
0.641	7.118	2.253				17.04	6.109	2.123
						19.65	7.046	2.277

Таблица 5. Давление q на гиперболической и параболической границах контакта, $a = 1$. Вторая стадия

гипербола, $\alpha_A = 0.65$, $x_A = 1.066$			парабола, $\alpha_A = 0.7$, $x_A = 2.375$		
y_A	y_A/x_A	q	y_A	y_A/x_A	q
1.924	2.051	1.164	0.878	2.085	1.153
2.216	2.362	1.257	1.013	2.404	1.248
2.545	2.713	1.360	1.164	2.715	1.352
3.345	3.566	1.586	1.319	3.132	1.452
4.271	4.553	1.807	1.520	3.608	1.574
5.071	5.260	1.945	1.750	4.157	1.704
5.606	5.977	2.082	2.003	4.757	1.842
6.429	6.854	2.227	2.257	5.359	1.953
7.380	7.868	2.376	2.601	6.176	2.100
			3.000	7.123	2.252

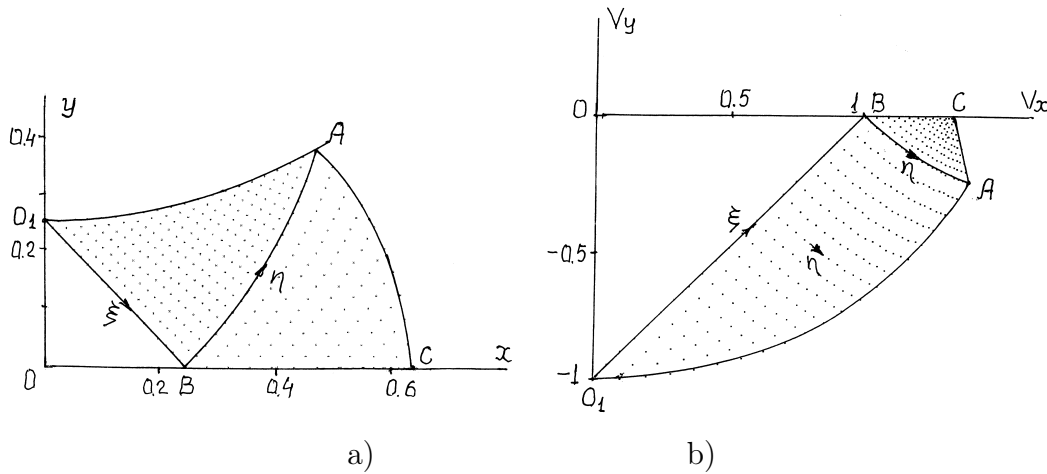


Рис. 8. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на третьей стадии вдавливания кругового пуансона.

В области ABC линии скольжения криволинейны и определяются решением смешанной задачи для уравнений (11), (12) с известными значениями φ и σ на η линии скольжения AB и граничным условием $\varphi = -\pi/4$, $y = 0$ на BC . Жесткопластическая граница AC является линией постоянных значений главных напряжений $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma = -1/2$ при контактном давлении $p = 1$ в точке A и тождественном удовлетворении условия равенства нулю силы по оси x . Напряжение σ_0 в области O_1BO и нормальное давление p_1 в точке O_1

находим из (17) при $\alpha = \alpha_A$ и $p = 1$ в точке A

$$\sigma_0 = \alpha_A - \frac{1}{2}, \quad p_1 = 1 - \alpha_A. \quad (18)$$

Область O_1BO на годографе скоростей ограничена прямой ξ линией скольжения O_1B с углом $\varphi = \pi/4$. Скорости в области O_1BA определяются решением смешанной задачи для уравнений (10), (11) при известных значениях V_x , V_y , σ , φ на линии скольжения O_1B и условиях (9) и $\varphi = -\pi/4 + \alpha$ на границе O_1A . Скорости V_x , V_y в точках границы O_1A находим используя конечно-разностную аппроксимацию уравнений (10) и (11) для линий скольжения η и уравнение (9), начиная от точки на ξ линии скольжения O_1B , ближайшей к точке O_1 , с последующими вычислениями скоростей в регулярных точках сетки линий скольжения при конечно-разностной аппроксимации уравнений (10), (11). Скорости в области ABC находим решением смешанной задачи для уравнений (10), (11) по известным значениям V_x , V_y , σ , φ на η линии скольжения BA и условиям $V_y = 0$, $\varphi = -\pi/4$ на BC с использованием конечно-разностной аппроксимации уравнений (10) и (11) для линий скольжения ξ . В приведенном примере среднее отклонение расчетной скорости V_x на границе AC от значения $x_A/y_A = 1.287$ по условию пластической несжимаемости равно 0.014.

Из годографа скоростей следуют отрицательные значения скорости деформации ε_2 на границе AC и положительные значения скорости деформации ε_1 на границе контакта O_1A и на линиях симметрии x , y и положительные значения диссипативной функции в пластической области. При $\alpha_A = 1/2$ в пластической области в центре полосы, ограниченной ξ линией скольжения и линиями симметрии $x = 0$, $y = 0$, имеет место пластический сдвиг с напряжениями $\sigma_1 = 1/2$, $\sigma_2 = -1/2$. При $\alpha_A = 1$ давление p_1 в точке O_1 контактной границы равно нулю. При $\alpha_A > 1$ в центре полосы образуется свободная граница пластической области с растяжением по оси x при $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = 0$.

В табл. 6 и 7 приведены зависимости среднего давления q и координат x_A , y_A точки A от угла контакта $0.1 \leq \alpha_A \leq 0.7$ при отношениях $y_A/x_A < 1$ на третьей стадии вдавливания с эллиптической, гиперболической и параболической границами. С уменьшением угла контакта α_A давление q увеличивается, приближаясь к единице при отношении $y_A/x_A \rightarrow 1/2$. При эллиптической границе с увеличением параметра a кривизна границы контакта уменьшается и приводит к снижению давления q .

Сила вдавливания и форма канала. Зависимость силы вдавливания $Q = 2q(s)x_A$ от перемещения s относительно начальной границы полосы при $y_A = H - s$ определяется формой контактной границы и углом α_A по уравнениям (6) – (8). Значения $q(s)$ на первой и второй стадиях вдавливания приведены в табл. 4 и 5. Полутолщина полосы определяется равенством $H = y_A + s_1$, где s_1 – глубина вдавливания на первой стадии при заданном угле α_A , приведенная в [6] и в табл. 1 и 2. Значение y_A при переходе от первой стадии вдавливания ко второй находим по табл. 4 и 5 при $q = q_1$ и $s = s_1$. Переход от второй стадии

Таблица 6. Координаты x_A , y_A и давление q при снижении угла α_A на эллиптической границе контакта. Третья стадия

$a = 1/3$				$a = 1$			$a = 3$		
α_A	x_A	y_A	q	x_A	y_A	q	x_A	y_A	q
0.7	0.090	0.087	0.675	0.644	0.586	0.635	2.790	2.084	0.515
0.6	0.074	0.065	0.716	0.565	0.475	0.691	2.697	1.956	0.600
0.5	0.060	0.047	0.759	0.483	0.373	0.745	2.561	1.793	0.681
0.4	0.046	0.034	0.805	0.390	0.279	0.797	2.356	1.582	0.758
0.3	0.034	0.023	0.852	0.296	0.195	0.849	2.041	1.300	0.829
0.2	0.022	0.014	0.901	0.199	0.120	0.900	1.559	0.930	0.893
0.1	0.011	0.006	0.950	0.100	0.055	0.950	0.865	0.476	0.949

Таблица 7. Координаты x_A , y_A и давление q при снижении угла α_A на гиперболической и параболической границах контакта, $a = 1$. Третья стадия

гипербола				парабола		
α_A	x_A	y_A	q	x_A	y_A	q
0.7	—	—	—	0.421	0.411	0.682
0.65	1.170	1.170	0.763	0.380	0.352	0.700
0.6	0.938	0.833	0.765	0.342	0.301	0.719
0.5	0.652	0.538	0.783	0.273	0.218	0.761
0.4	0.466	0.344	0.815	0.211	0.153	0.805
0.3	0.325	0.217	0.856	0.155	0.102	0.852
0.2	0.207	0.125	0.902	0.101	0.061	0.901
0.1	0.101	0.057	0.950	0.050	0.028	0.950

вдавливания к третьей определяется неравенствами $y_A/x_A < 1$ при $s > s_2$ и $\alpha_A < \alpha_A^*$, где α_A^* – постоянное значение угла контакта α_A на второй стадии при вдавливании в толстую полосу, и значениями $q(s)$ приведенными в табл. 6 и 7.

На первой стадии вдавливания при $s \leq s_1$ жесткая область полосы неподвижна и форма пластического отпечатка определяется по уравнениям (6) – (8) при вдавливании в пластическое полупространство с выдавливанием материала на поверхность полосы.

На второй и третьей стадиях форма дна поперечного канала определяется по уравнениям (6) – (8) в зависимости от угла $0 \leq \alpha \leq \alpha_A$ наклона касательной к контактной границе. Форма свободной границы канала справа от границы контакта при $x > x_A$ и $y > y_A$ определяется в зависимости от скорости пуансона $V = 1$ и перемещения жесткой области полосы по оси x со скоростью

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x_A}{H - s}, \quad s_1 \leq s \leq H - y_A. \quad (19)$$

На второй стадии угол контакта α_A^* имеет постоянное значение, координата x_A точки A не зависит от s , и уравнение свободной границы канала при $x > x_A$ находим интегрированием уравнения (19)

$$x = x_A \left\{ 1 + \ln \left[\frac{H - s_1}{H - s} \right] \right\}, \quad y = H - s. \quad (20)$$

При $\alpha_A < \alpha_A^*$ на третьей стадии координата x_A в уравнении (19), определяемая по уравнениям (6) – (8) является неявной функцией s , и увеличение перемещения жестких концов полосы по оси x находим численным интегрированием уравнения (19).

На рис. 9 показана зависимость силы $Q(s)$ и формы канала при вдавливании пуансона с параболической границей контакта в полосу с полутолщиной $H = 2.017$ при $\alpha_A^* = 0.7$ и $x_A = 0.421$. При переходе от первой стадии при $s_1 = 0.08$ сила Q принимает максимальное значение 1.622. При переходе к третьей стадии при $s = 1.85$ сила Q снижается до 0.574. Расчеты выполнены с шагом $\Delta s = 0.03$ на второй и третьей стадиях до конечного значения $s = 2$ при снижении угла контакта α_A до значения 0.282 в конце третьей стадии.

На рис. 10 показана зависимость $Q(s)$ и формы канала при вдавливании плоского гладкого пуансона с полушириной $a = 0.421$ в полосу с полутолщиной $H = 2.017$, для сравнения с вдавливанием параболического пуансона на рис. 9. Зависимость давления q от отношения y_A/a при $y_A = H - s$ для плоского пуансона приведена в табл. 8 и $q = 1$ при $y_A/a < 1$. В этом случае сдавливание полосы начинается при $s \geq 0$ без образования наплыва материала на границе полосы при постоянной длине контактной границы с формой канала, определяемой по уравнениям (20) при $s_1 = 0$, $x_A = a$, $s < H$, $x > a$. Из табл. 8 находим $q = 1.926$ при $s = 0$, $H/a = 4.791$ и $Q = 1.622$ равно максимальной силе вдавливания параболического пуансона на рис. 9а при переходе от первой стадии ко второй. Зависимости $Q(s)$ для плоского и параболического пуансонов практически совпадают до глубины вдавливания $s = 1.5$, при $q = 1$ и $Q = 0.845$ и $y_A/a = 1$ для параболического пуансона, и $y_A/x_A = 1.708$ для плоского пуансона.

Таблица 8. Давление q на гладкий плоский пуансон по Прандтлю. $\alpha_A = 0$, $a = x_A = 0.421$. Вторая стадия

y_A/a	q	y_A/x_A	q	y_A/x_A	q
1.000	1.000	2.440	1.342	5.431	2.056
1.221	1.019	2.867	1.463	6.382	2.227
1.469	1.069	3.363	1.596	7.510	2.405
1.750	1.143	3.944	1.740	8.152	2.496
2.071	1.234	4.627	1.893	8.700	2.571

При вдавливании гладкого плоского пуансона при $s > 1.5$ и $y_A/a < 1$ значения q и Q остаются постоянными. При вдавливании параболического пуансона до $s = 1.805$ при переходе к третьей стадии значения q и Q снижаются до 0.694

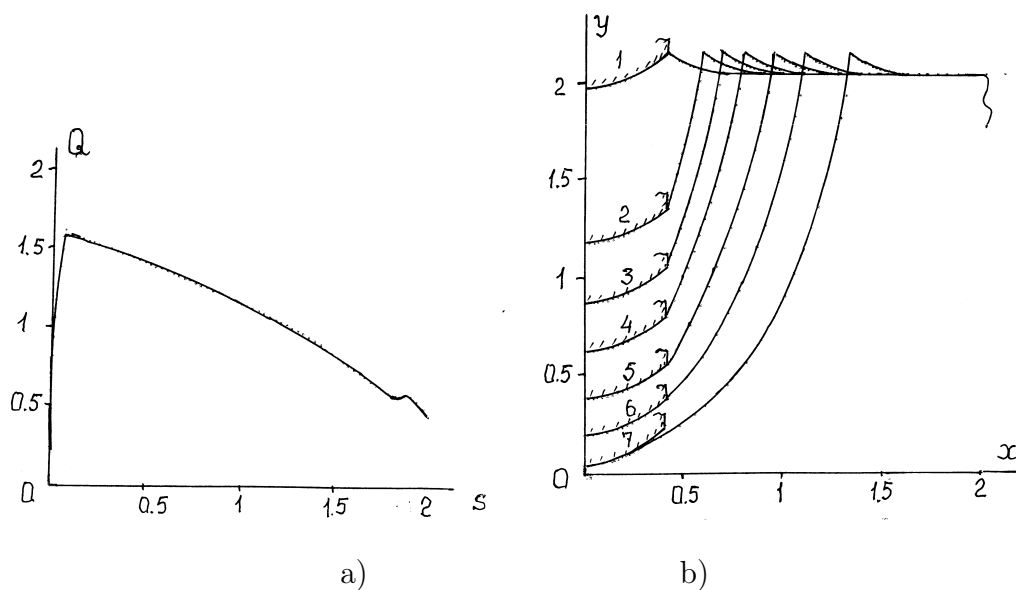


Рис. 9. Зависимость $Q(s)$ и формы канала при вдавливании параболического пуансона. 1 – переход ко второй стадии при $s = 0.08$; 2–6 – формы канала на второй стадии при $s = 0.89, 1.19, 1.43, 1.67, 1.85$; 7 – форма канала на третьей стадии при $s = 2$.

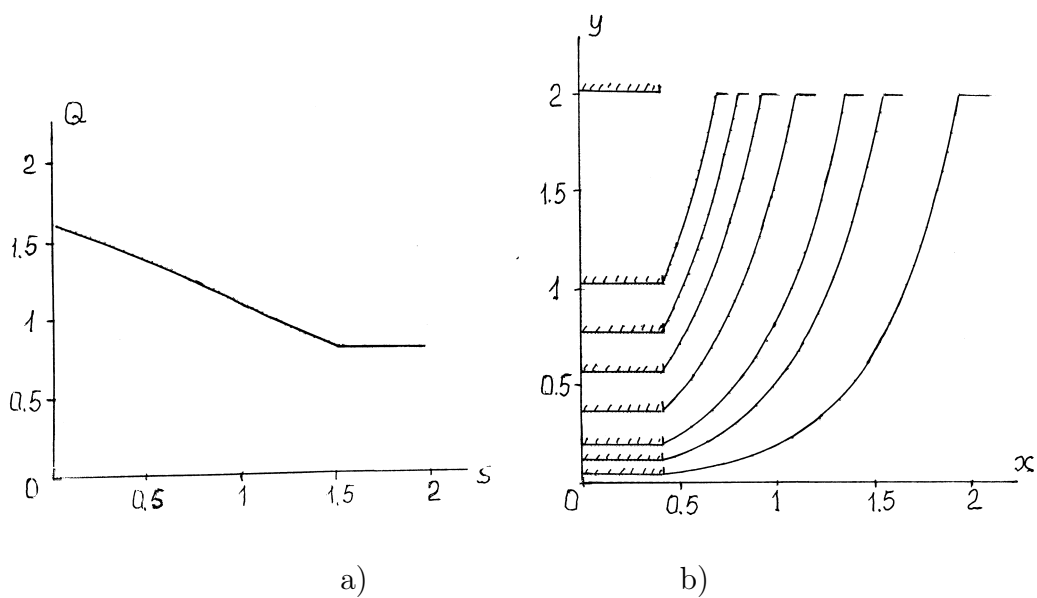


Рис. 10. Зависимость силы $Q(s)$ и формы канала при вдавливании плоского пуансона.

и 0.585 соответственно и незначительно изменяются при увеличении s до 1.88

при постоянных значениях α_A и x_A . При $s > 1.88$ происходит уменьшение угла контакта α_A до 0.282 при $s = 2$, снижение длины границы контакта и силы Q до 0.450 при повышении давления q до 0.796.

Форма свободной границы канала при $x > x_A$ одинакова при вдавливании плоского и параболического пуансонов с постоянным значением x_A . На третьей стадии вдавливания плоского пуансона при $s > 1.88$ скорость перемещения жестких концов полосы увеличивается при сдавливании тонкого слоя, что приводит к быстрому расширению канала по сравнению с вдавливанием параболического пуансона.

Закключение. Приведено численное моделирование поперечного вдавливания гладких пуансонов с эллиптической, гиперболической и параболической цилиндрическими контактными границами в толстую полосу на основе уравнений теории идеальной пластичности при плоской деформации. Вследствие выпуклости цилиндрической контактной границы вдавливание пуансонов начинается с линейного контакта с полосой при увеличении пластической области с образованием наплыва материала на поверхности полосы по модели вдавливания в пластическое полупространство. Пластическая область ограничена конечной длиной контактной границы в нормальном сечении пуансонов при вырождении веера линий скольжения в сингулярной точке и снижении контактного давления. На второй стадии вдавливания в толстую полосу длина контактной границы с пластической областью по толщине полосы между верхним и нижним пуансонами остается постоянной. Линии скольжения вычисляются на плоскости годографа скоростей с кинематическими граничными условиями на контактной границе с определением контактного давления, линий скольжения на физической плоскости и криволинейной границы канала при раздвижении свободных жестких концов полосы. Толщина полосы определяется равенством среднего давления при переходе от первой стадии вдавливания ко второй. Вторая стадия ограничена вырождением веера линий скольжения с приближением среднего давления к единице при отношении проекции контактной границы к толщине пластической области близкого к двум. При снижении указанного отношения меньше единицы на третьей стадии вдавливания пластическая область моделируется линиями скольжения с непрерывным полем скоростей и снижении длины контактной границы при сближении верхнего и нижнего пуансонов. При малой кривизне и большой длине контактной границы линии скольжения и годографы скоростей приближаются к задаче Прандтля о вдавливании плоских пуансонов в толстую полосу при давлении ниже $1 + \pi/2$ на второй стадии равно единице на третьей стадии при постоянной длине контактной границы и силы вдавливания с быстрым увеличением ширины канала при сдавливании тонкого пластического слоя.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Непершин Р.И. – написание текста рукописи, обзор литературы по теме статьи, проведение экспериментов, редактирование текста рукописи, согласование финальной версии рукописи.

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. Nepershin R.I. – writing the text of the manuscript, reviewing the literature on the topic of the article, conducting experiments, editing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript.

Competing interests. The author declares that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М. : Гостехиздат, 1956. – 407 с.
2. Соколовский В. Теория пластичности. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
3. Ишлинский А., Ивлев Д. Математическая теория пластичности. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
4. Druyanov B., Nepershin R. Problems of Technological Plasticity. – Amsterdam : Elsevier, 1994. – 406 с.
5. Непершин Р. О вдавливании цилиндра в идеально-пластическое полупространство с учетом контактного трения // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. – 2018. – 4 (38). – С. 102–119.
6. Непершин Р. Вдавливание эллиптического цилиндра в идеально пластическое полупространство // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. – 2023. – 1 (55). – С. 69–85. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.009.
7. Nepershin R. Applied Problems of Plasticity. – Moscow : MSTU "STANKIN", 2016. – 310 с.

REFERENCES

1. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. – Oxford University Press, 1985.
2. Sokolovskii V. V. The Theory of Plasticity. – Moscow : Vyshaya Shkola, 1969. – 608 p. – (In Russian).
3. Ishlinskii A. Y., Ivlev D. D. Mathematical Theory of Plasticity. – Moscow : Fizmatlit, 2001. – 704 p. – (In Russian).
4. Druyanov B. A., Nepershin R. I. Theory of Technological Plasticity. – Amsterdam : Elsevier, 1994. – 426 p.
5. Nepershin R. I. On the ideal plastic half-space indentation by the cylinder with contact friction consideration // Vestnik I.Ya. Yakovlev ChSPU. Series of Mechanical limit state. – 2018. – 1 (35). – P. 26–38. – (In Russian).
6. Nepershin R. I. Ideal plastic half-space indentation by the elliptical cylinder // Vestnik I.Ya. Yakovlev ChSPU. Series of Mechanical limit state. – 2023. – 1 (55). – P. 69–85. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.009. – (In Russian).
7. Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. – Moscow : MSTU "STANKIN", 2016. – 310 p.