

ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ГЕМИТРОПНОГО МИКРОПОЛЯРНОГО УПРУГОГО ТЕЛА. МЕТОД МНОГОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. Настоящая работа посвящена построению канонической диагональной энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела. Энергия деформации задается квадратичной формой, зависящей от асимметричных тензора деформации и тензора изгиба-кручения. Наиболее удобным для целей настоящего исследования оказывается А-представление энергии деформации гемитропной микрополярной упругой среды, характеризующейся 9 изоэнтропийными механическими модулями. Квадратичная форма энергии деформации диагонализуется методом последовательных двумерных поворотов Якоби. Несвязанные двумерные повороты путем их композиции можно объединить в один многомерный поворот. Для диагонализации матрицы квадратичной формы оказалось достаточно 5 различных вращений. В результате применения метода Якоби получается диагональная матрица, подобная матрице квадратичной энергетической формы. Причем на главной диагонали располагаются собственные числа. Композиция указанных 5 поворотов, являющихся преобразованием подобия, определяют переход к новым каноническим переменным. Каноническая форма энергии деформации позволяет явно и наиболее просто сформулировать критерии устойчивости равновесия (equilibrium stability) для гемитропного микрополярного упругого тела. Получены односторонние ограничения, накладываемые на определяющие константы, обеспечивающие положительную определенность квадратичной формы, гарантирующих устойчивость равновесия гемитропного микрополярного упругого тела. Показана эквивалентность систем неравенств полученных ранее методом Лагранжа и методом Якоби. Ключевые слова: энергия деформации, внутренняя энергия, энтропия, устойчивость равновесия, гемитропная микрополярная среда, упругость, диагонализация, каноническая квадратичная форма, положительная определенность, определяющие неравенства

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



для цитирования: Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Диагонализация энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела. Метод многомерных вращений // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 159–179. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.021. EDN: UNKYZ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. 2026

Поступила: 12.02.2026; принята в печать: 24.04.2026; опубликована: 01.07.26.

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

DIAGONALIZATION OF THE ENERGY FORM OF A HEMITROPIC MICROPOLAR ELASTIC BODY. METHOD OF MULTIDIMENSIONAL ROTATIONS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. This paper is devoted to a canonical diagonal energy form for a hemitropic micropolar elastic solid. The strain energy is given by a quadratic form dependent on the asymmetric strain tensor and wryness tensor. The A-representation of the strain energy of a hemitropic micropolar elastic medium, characterized by nine isentropic mechanical moduli, is most convenient for the aims of this study. The quadratic form of the strain energy is diagonalized by using the method of two-dimensional Jacobi rotations. Undepend two-dimensional rotations can be combined into a single multidimensional rotation by their composition. Five different rotations were found to be sufficient for diagonalizing the matrix of the quadratic form. Application of the Jacobi method yields a diagonal matrix similar to the matrix of the quadratic energy form. The eigenvalues are located on the main diagonal. The composition of mentioned five rotations, which constitute a similarity transformation, determines the transition to new canonical variables. The canonical form of the strain energy allows for the explicit and simple formulation of equilibrium stability criteria for a hemitropic micropolar elastic body. Unilateral constraints are obtained on the constitutive constants, assuring the positive definiteness of the quadratic form and the equilibrium stability of a hemitropic micropolar elastic body. The equivalence of the systems of inequalities previously obtained by the Lagrange method and the Jacobi method is demonstrated.

Keywords: strain energy, internal energy, entropy, equilibrium stability, hemitropic micropolar medium, elasticity, diagonalization, canonical quadratic form, positive definiteness, constitutive inequalities

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: vmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



to cite this article: Murashkin E. V., Radayev Y. N. Diagonalization of the energy form of a hemitropic micropolar elastic body. Method of multidimensional rotations // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 159–179. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.021

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Условия устойчивости равновесия деформируемого тела позволяют говорить о пределах применимости той или иной математической модели упругого тела. Наиболее просто они получаются для линейных упругих тел. В этом случае достаточно определить условия положительной определенности квадратичной формы энергии деформации. Для канонических (диагональных) форм такие условия соответствуют положительности их коэффициентов. В теории квадратичных форм известно несколько способов диагонализации: метод отделения квадратов Лагранжа [1–3], метод последовательных поворотов Якоби [1–7] и т.д.

Математическое моделирование механического поведения микрополярных упругих тел начинается с построения энергии деформации [8–16]. Энергия деформации есть внутренняя энергия, поскольку мы ограничиваемся изоэнтропийными (адиабатическими) процессами. Для изотермических процессов энергии деформации следует интерпретировать как свободную энергию Гельмгольца. В большинстве доступных литературных источников внутренняя энергия вводится как термодинамический потенциал состояния на единицу инвариантного объема и обозначается U . В ходе обсуждения рассматриваются только изоэнтропийные процессы. Таким образом, для внутренней энергии имеем

$$U = \bar{U}(\bar{S}, \epsilon_{ij}, \kappa_{ij}), \quad (1)$$

где ϵ_{ij} — несимметричный тензор деформации, κ_{ij} — тензор изгиба-кручения, $\bar{S}$ — энтропия на единицу инвариантного объема, черта над символом относится к термодинамическому потенциалу состояния в отличие от самой физической полевой величины (в (1) это замечание относится к U и S).

Второй (взаимный) принцип Гиббса гласит (см. [17]): «для локального равновесия необходимо и достаточно, чтобы при всех возможных изменениях состояния системы, не меняющих ее энтропии, изменение ее энергии либо обращалось в нуль, либо было положительным: $\delta \bar{U} \geq 0$.»

Исходная формулировка взаимного принципа может быть аналогично усилена согласно

$$\bar{U}(\bar{S}, \epsilon_{ij}, \kappa_{ij}) \longrightarrow \min \quad (\delta \bar{S} = 0), \quad (2)$$

т.е. поскольку $\delta \bar{S} = 0$, то

$$\begin{aligned} \delta \bar{U} &= 0, \quad \delta^2 \bar{U} \geq 0, \\ \delta^2 \bar{U} &= 0, \text{ тогда и только тогда, когда } \delta \epsilon_{ij} = 0 \text{ и } \delta \kappa_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Основываясь на взаимном принципе, критерий устойчивости изоэнтропийного равновесия формулируется односторонним ограничением на вторые вариации внутренней энергии $\delta^2 \bar{U}$:

$$\begin{aligned} \delta^2 \bar{U}(0, 0)[\delta \epsilon_{ij}, \delta \kappa_{ij}] &= \delta^2 \bar{U} \bigg|_{\epsilon_{ij}=0, \kappa_{ij}=0} [\delta \epsilon_{ij}, \delta \kappa_{ij}] \geq 0, \\ \delta^2 \bar{U} &= 0, \text{ тогда и только тогда, когда } \delta \epsilon_{ij} = 0 \text{ и } \delta \kappa_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В силу того, что вторая вариация внутренней энергии $\delta^2 \bar{U}$ является квадратичной формой от вариаций $\delta \epsilon_{ij}$ и $\delta \kappa_{ij}$ критерий устойчивости равновесия определяется условиями положительной определенности указанной квадратичной формы.

В настоящем исследовании широко используется терминология, обозначения, методы и результаты, представленные в наших предыдущих работах [14, 15, 18–23].

1. Энергия деформации гемитропного микрополярного упругого тела. В этом разделе ограничимся рассмотрениями в трехмерном пространстве, снабженном декартовой системой координат.

Микрополярное твердое тело называется гемитропным, если компоненты определяющих тензоров не изменяются при поворотах системы координат, т.е. они инвариантны относительно группы полуизометрических преобразований, а именно изометрических преобразований, за исключением зеркальных отражений и инверсий трехмерного евклидова пространства. В этом случае корректная запись основных уравнений может быть представлена только с использованием формализма псевдотензоров. Однако, простой алгоритм преобразования псевдотензора в соответствующий ему абсолютный тензор позволяет нам провести наше исследование в терминах абсолютных тензоров.

Введем энергию деформации $\mathcal{U} \Big|_{\text{adiabatic}}$ [15, 19, 20], рассчитанную для единичного инвариантного элемента объема при постоянной энтропии ($S = \text{const}$), в виде:

$$\bar{U} \Big|_{\text{adiabatic}} = \bar{U} \Big|_{\bar{S}=\text{const}} = \mathcal{U} \Big|_{\text{adiabatic}} (\epsilon_{(ij)}, \kappa_{(ij)}, \varphi_i, \kappa_i), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \partial_i u_j - e_{ijk} \varphi_k, & 2\epsilon_{(ij)} &= \partial_i u_j + \partial_j u_i, & \kappa_{ij} &= \partial_i \phi_j, \\ \kappa_{(ij)} &= \partial_i \phi_j + \partial_j \phi_i, & \varphi_i &= \phi_i - \frac{1}{2} e_{ikl} \partial_{[k} u_{l]}, & \kappa_i &= \frac{1}{2} e_{ijs} \kappa_{[js]}. \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях (5) и (6) используются следующие обозначения: u_i — трансляционные перемещения; ϕ_i — спинорные перемещения; ϵ_{kl} — асимметричный тензор деформации; κ_{kl} — тензор изгиба–кручения; ∂_i обозначает частную производную по пространственной координате x_i ; e_{ijk} — альтернирующий тензор; φ_i — относительные микроповороты; круглые скобки обозначают алгебраическую симметризацию; квадратные скобки обозначают алгебраическое альтернирование.

Следует отметить, что $\mathcal{U} \Big|_{\text{adiabatic}}$ по сути является потенциалом силовых и моментных напряжений. В дальнейшем вместо $\mathcal{U} \Big|_{\text{adiabatic}}$ используется сокращенное обозначение $\mathcal{U}$.

Энергия деформации $\mathcal{U}$ инвариантна относительно вращений и трансляций пространства, а также относительно преобразований пространственной инверсии и зеркальных отражений, т.е. для полной изометрической группы. Существуют три различных подхода к определению энергии деформации, подробно описанные в статье [15]. Первый из них — это А-представление. А-представление [14] основано на понятиях теории рациональных алгебраических инвариантов и является линейной оболочкой индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов несимметричного тензора деформации и пространственного градиента поля микровращений. Основы теории целых рациональных алгебраических инвариантов подробно обсуждаются в фундаментальных монографиях [24, 25].

Инварианты полной неприводимой системы индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических квадратичных инвариантов симметричных компонент несимметричных тензоров деформации, тензора изгиба-кручения и связанных с ними векторов для гемитропного твердого тела, вычисляются в декартовых координатах следующим образом [23]

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(ik)} \epsilon_{(lm)}, & \mathbf{I}_2 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \kappa_{(ik)} \kappa_{(lm)}, & \mathbf{I}_3 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(il)} \epsilon_{(km)}, \\ \mathbf{I}_4 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \kappa_{(il)} \kappa_{(km)}, & \mathbf{I}_5 &= \delta_{ik} \varphi_i \varphi_k, & \mathbf{I}_6 &= \delta_{ik} \kappa_i \kappa_k, \\ \mathbf{I}_7 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(ik)} \kappa_{(lm)}, & \mathbf{I}_8 &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(ik)} \kappa_{(lm)}, & \mathbf{I}_9 &= \delta_{ik} \kappa_i \varphi_k, \end{aligned} \quad (7)$$

где δ_{lm} — символ Кронекера.

В силу формул (7) для инвариантов $\mathbf{I}_c$ ($c = 1, \dots, 9$) энергия деформации (5) представляется в виде (см. [14, 15, 19]):

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= A_1 \delta_{is} \delta_{lm} \epsilon_{(is)} \epsilon_{(lm)} + A_2 \delta_{is} \delta_{lm} \kappa_{(is)} \kappa_{(lm)} + A_3 \delta_{is} \delta_{lm} \epsilon_{(il)} \epsilon_{(sm)} + \\ &+ A_4 \delta_{is} \delta_{lm} \kappa_{(il)} \kappa_{(sm)} + A_5 \delta_{is} \varphi_i \varphi_s + A_6 \delta_{is} \kappa_i \kappa_s + \\ &+ A_7 \delta_{is} \delta_{lm} \epsilon_{(is)} \kappa_{(lm)} + A_8 \delta_{is} \delta_{lm} \epsilon_{(is)} \kappa_{(lm)} + A_9 \delta_{is} \kappa_i \varphi_s, \end{aligned} \quad (8)$$

где A_c ($c = 1, \dots, 9$) — произвольные константы. Очевидно, эти константы могут интерпретироваться как определяющие упругие модули (абсолютные скаляры) при спецификации модели гемитропного микрополярного упругого твердого тела.

Для упрощения дальнейшего изложения введем формальные замены независимых переменных состояния $\epsilon_{(ij)}$, $\kappa_{(ij)}$, φ_i , κ_i энергии деформации $\mathcal{U}$ согласно следующим правилам:

$$\begin{aligned} \epsilon_{(11)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{1}}, & \varphi_1 &\longleftrightarrow Y_{\underline{7}}, & \kappa_{(11)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{10}}, & \kappa_1 &\longleftrightarrow Y_{\underline{16}}, \\ \epsilon_{(22)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{2}}, & \varphi_2 &\longleftrightarrow Y_{\underline{8}}, & \kappa_{(22)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{11}}, & \kappa_2 &\longleftrightarrow Y_{\underline{17}}, \\ \epsilon_{(33)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{3}}, & \varphi_3 &\longleftrightarrow Y_{\underline{9}}, & \kappa_{(33)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{12}}, & \kappa_3 &\longleftrightarrow Y_{\underline{18}}, \\ \epsilon_{(23)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{4}}, & & & \kappa_{(23)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{13}}, & & \\ \epsilon_{(13)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{5}}, & & & \kappa_{(13)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{14}}, & & \\ \epsilon_{(12)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{6}}, & & & \kappa_{(12)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{15}}, & & \end{aligned} \quad (9)$$

где мы подчеркиваем индекс, чтобы отличить двузначные векторные индексы от двух соседних одноместных тензорных индексов. Вектор формальных переменных² $[Y]$ принадлежит формальному векторному пространству алгебраической размерности 18.

С учетом замен (9) квадратичная форма энергии деформации (8) записывается как:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & AY_{\underline{1}}^2 + AY_{\underline{3}}^2 + AY_{\underline{7}}Y_{\underline{10}} + AY_{\underline{1}}Y_{\underline{10}} + AY_{\underline{10}}^2 + AY_{\underline{4}}^2 + AY_{\underline{7}}Y_{\underline{11}} + 2AY_{\underline{10}}Y_{\underline{11}} + \\ & + AY_{\underline{2}}^2 + AY_{\underline{4}}^2 + AY_{\underline{7}}Y_{\underline{12}} + 2AY_{\underline{10}}Y_{\underline{12}} + 2AY_{\underline{11}}Y_{\underline{12}} + AY_{\underline{12}}^2 + AY_{\underline{4}}^2 + \\ & + 2AY_{\underline{13}}^2 + 2AY_{\underline{4}}^2 + 2AY_{\underline{15}}^2 + AY_{\underline{6}}^2 + AY_{\underline{17}}^2 + AY_{\underline{6}}^2 + 2AY_{\underline{1}}Y_{\underline{2}} + AY_{\underline{10}}Y_{\underline{2}} + \\ & + AY_{\underline{7}}Y_{\underline{2}} + AY_{\underline{11}}Y_{\underline{2}} + AY_{\underline{12}}Y_{\underline{2}} + AY_{\underline{1}}^2 + AY_{\underline{3}}^2 + 2AY_{\underline{1}}Y_{\underline{3}} + AY_{\underline{10}}Y_{\underline{3}} + \\ & + AY_{\underline{11}}Y_{\underline{3}} + AY_{\underline{12}}Y_{\underline{3}} + AY_{\underline{12}}Y_{\underline{3}} + 2AY_{\underline{2}}Y_{\underline{3}} + AY_{\underline{1}}^2 + AY_{\underline{3}}^2 + 2AY_{\underline{13}}Y_{\underline{4}} + \\ & + 2AY_{\underline{3}}^2 + 2AY_{\underline{14}}Y_{\underline{5}} + 2AY_{\underline{3}}^2 + 2AY_{\underline{15}}Y_{\underline{6}} + 2AY_{\underline{3}}^2 + AY_{\underline{16}}Y_{\underline{7}} + \\ & + AY_{\underline{7}}^2 + AY_{\underline{17}}Y_{\underline{8}} + AY_{\underline{5}}^2 + AY_{\underline{18}}Y_{\underline{9}} + AY_{\underline{5}}^2. \quad (10) \end{aligned}$$

Отметим, что уравнение (10) может быть представлено в компактных матричных обозначениях в виде:

$$\mathcal{U} = [Y]^T[A][Y], \quad (11)$$

где $[Y] = [Y_{\underline{1}}, Y_{\underline{2}}, Y_{\underline{3}}, Y_{\underline{4}}, Y_{\underline{5}}, Y_{\underline{6}}, Y_{\underline{7}}, Y_{\underline{8}}, Y_{\underline{9}}, Y_{\underline{10}}, Y_{\underline{11}}, Y_{\underline{12}}, Y_{\underline{13}}, Y_{\underline{14}}, Y_{\underline{15}}, Y_{\underline{16}}, Y_{\underline{17}}, Y_{\underline{18}}]^T$ — транспонированная вектор-строка алгебраической размерности 18, составленная из формальных переменных; $[A]$ — формальная квадратная симметричная матрица размерности 18×18 механических модулей микрополярной среды с элементами a_{ij} ($i, j = 1, \dots, 18$). В случае гемитропного микрополярного упругого тела матрица $[A]$ имеет следующую блочную структуру (к сожалению, не диагональную, но, по меньшей мере, блочную трехдиагональную):

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [0] & [0] & [A_{14}] & [0] & [0] \\ [0] & [A_{22}] & [0] & [0] & [A_{25}] & [0] \\ [0] & [0] & [A_{33}] & [0] & [0] & [A_{36}] \\ [A_{41}] & [0] & [0] & [A_{44}] & [0] & [0] \\ [0] & [A_{52}] & [0] & [0] & [A_{55}] & [0] \\ [0] & [0] & [A_{63}] & [0] & [0] & [A_{66}] \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где $[A_{hk}]$ ($h, k = 1, \dots, 6$) — симметричные блочные матрицы алгебраической размерности 3×3 ; h и k метаиндексы, нумерующие блочные элементы; $[0]$ —

²В настоящей статье используются векторно-матричные обозначения. Они отличаются от векторно-тензорных обозначений. Например, $Y \cdot A \cdot Y = [Y]^T[A][Y]$, где квадратные скобки указывают на квадратную матрицу или вектор-столбец. Отметим, что система символьных вычислений (например, Wolfram Mathematica) оперирует с векторно-матричными обозначениями.

нулевые блочные матрицы размерности 3×3 . При этом, ненулевые блоки расположены на трех диагоналях:

$$[A_{hk}] = [A_{kh}] \neq [0] \text{ при } h = k, k = h + 3, h = k + 3. \quad (13)$$

Ненулевые блочные матрицы $[A_{hk}]$ определяются через микрополярные упругие механические модули A_a ($a = 1, \dots, 9$) согласно следующим формулам:

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= \begin{bmatrix} A_1 + A_3 & A_1 & A_1 \\ A_1 & A_1 + A_3 & A_1 \\ A_1 & A_1 & A_1 + A_3 \end{bmatrix}, \quad [A_{44}] = \begin{bmatrix} A_2 + A_4 & A_2 & A_2 \\ A_2 & A_2 + A_4 & A_2 \\ A_2 & A_2 & A_2 + A_4 \end{bmatrix}, \\ [A_{14}] &= [A_{41}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_7 + A_8 & A_7 & A_7 \\ A_7 & A_7 + A_8 & A_7 \\ A_7 & A_7 & A_7 + A_8 \end{bmatrix}, \\ 2[A_{36}] &= 2[A_{63}] = A_9 \text{ diag}[1, 1, 1], \quad [A_{25}] = [A_{52}] = A_8 \text{ diag}[1, 1, 1], \\ [A_{22}] &= 2A_3 \text{ diag}[1, 1, 1], \quad [A_{33}] = A_5 \text{ diag}[1, 1, 1], \\ [A_{55}] &= 2A_4 \text{ diag}[1, 1, 1], \quad [A_{66}] = A_6 \text{ diag}[1, 1, 1]. \end{aligned} \quad (14)$$

2. Метод последовательных поворотов (Метод Якоби) матрицы квадратичной энергетической формы. Метод последовательных поворотов [1, 2, 4–7], предложенный К.Г.Я. Якоби в 1846 г. в работе [5, Р. 65–66], предназначен для приведения квадратичной формы к каноническому виду. В основе метода лежит ключевое понятие линейной алгебры — подобные матрицы, которые задают один и тот же тензор, представленный в разных базисах.

Квадратные матрицы $[A]$ и $[B]$ алгебраической размерности $N \times N$ называются подобными, если существует невырожденная (обратимая) матрица $[P]$ размерности $N \times N$ такая, что:

$$[B] = [P]^{-1}[A][P]. \quad (15)$$

Матрицу $[P]$ называют матрицей перехода (или матрицей преобразования подобия). Подобные матрицы обладают важными для приложений свойствами: одинаковыми собственными значениями, определителем, следом, рангом и характеристическим многочленом. Последнее обстоятельство особенно важно при использовании в качестве матрицы перехода матрицы поворота, относящейся к группе изометрических/ортогональных невырожденных матриц. Обратная матрица к ортогональной/изометрической получается из исходной транспонированием, т.е. $[P]^{-1} = [P]^T$.

Для теории квадратичных форм использование подобных матриц означает следующее. Зададим переход от старых переменных $[Y]$ к новым переменным $[X]$ с помощью преобразования вращения/поворота согласно:

$$[X] = [P][Y], \quad [Y] = [P]^{-1}[X]. \quad (16)$$

Представление квадратичной формы (11) в новых координатах (16) после несложных преобразований примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= [Y]^T[A][Y] = ([P]^{-1}[X])^T[A]([P]^{-1}[X]) = \\ &= [X]^T([P][A][P]^T)[X] = [X]^T[A]_{\text{sim}}[X],\end{aligned}\quad (17)$$

где введено обозначение для подобной матрицы $[A]_{\text{sim}} = [P][A][P]^T$.

Все вышесказанное приводит нас к, очевидному, утверждению [1, 2], что всякая симметричная матрица $[A]$ алгебраической размерности $N \times N$ может быть представлена в виде:

$$[A] = [P]^T[A]_{\text{diag}}[P], \quad (18)$$

где $[A]_{\text{diag}} = \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N] = -$ диагональная матрица; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ — собственные числа симметричной матрицы $[A]$; $[P]$ ($[P]^{-1} = [P]^T$) — матрица поворота (изометрическая/ортогональная).

Следует отметить, что если матрица $[A]$ является матрицей квадратичной формы $\mathcal{U}$, тогда диагональные элементы матрицы $[A]_{\text{diag}}$, кроме того, являются коэффициентами канонической формы, представленной в новых формальных переменных ($[X] = [P][Y]$):

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\text{diag}} = [X]^T[A]_{\text{diag}}[X] = \sum_{s=1}^{18} \alpha_j X_j^2. \quad (19)$$

Представление (18) можно преобразовать к виду:

$$[A][P]^T = [P]^T[A]_{\text{diag}}, \quad (20)$$

Если выписать систему равенств (20) по столбцам, то окажется, что столбец с индексом i матрицы $[P]^T$ является собственным вектором, соответствующим собственному числу α_i .

Умножив равенство (18) слева и справа на изометрические матрицы $[P]$ и $[P]^T$, соответственно, получим

$$[A]_{\text{diag}} = [P][A][P]^T. \quad (21)$$

Суть метода Якоби состоит в построении такой композиции плоских вращений с помощью изометрических матриц $[P_1]$, ..., $[P_n]$, так чтобы выполнялось условие

$$[\Pi_n][A][\Pi_n]^T \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [A]_{\text{diag}}, \quad (22)$$

где преобразования подобия Π_n , являющиеся композицией последовательных поворотов P_1 , ..., P_n определяется согласно

$$[\Pi_n] = [P_n] \cdot \dots \cdot [P_1] = [P_n] \dots [P_1]. \quad (23)$$

Введем в рассмотрение матрицу $[P^{kl}](\theta)$ с элементами p_{ij} , определяющимися согласно правилам:

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{kk}(\theta) = p_{ll}(\theta) = \cos \theta, \\ p_{kl}(\theta) = -p_{lk}(\theta) = \sin \theta, \\ p_{ii} = 1, \text{ при } i \neq k, i \neq l, \\ p_{ij} = 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \quad (24)$$

или в матричном представлении

$$[P^{kl}](\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos \theta & \cdots & \sin \theta & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\sin \theta & \cdots & \cos \theta & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Очевидно, что матрица $[P^{kl}](\theta)$ является изометрической и осуществляет поворот в плоскости $Y_k Y_l$ на угол θ . Нетрудно вычислить угол θ , такой чтобы после преобразования подобия $[P^{kl}](\theta)$ на симметричную матрицу $[A]$ согласно (18) ее элементы a_{kl} и a_{lk} стали бы равны нулю.

В результате несложных вычислений получим уравнение для определения угла θ [1]:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2a_{kl}}{a_{kk} - a_{ll}}. \quad (26)$$

Важно отметить, что угол θ определяет угол наклона к горизонту главной оси, соответствующей наибольшему собственному значению. Кроме того, равенство (26) определяет двустороннее ограничение на угол θ :

$$-\pi \leq 4\theta \leq \pi. \quad (27)$$

Причем равенство в (27) достигается только при условии $a_{kk} = a_{ll}$, т.е.

$$|\theta| = \frac{\pi}{4} \text{ при } a_{kk} = a_{ll}. \quad (28)$$

В расчетах удобно использовать следующие формулы, следующие из (26):

$$\tau = \operatorname{ctg} 2\theta, \quad t = \frac{\operatorname{sgn}(\tau)}{|\tau| + \sqrt{1 + \tau^2}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \sin \theta = t \cos \theta. \quad (29)$$

Перейдем к пошаговой реализации метода последовательных изометрических преобразований. Будем объединять в один шаг повороты на один и тот же угол относительно не связанных пар матричных индексов.

Шаг 1. В матрице $[A]$ присутствуют несколько пар диагональных элементов, которые удовлетворяют условию (28):

$$a_{\underline{1}\underline{1}} = a_{\underline{2}\underline{2}} = a_{\underline{3}\underline{3}}, \quad a_{\underline{7}\underline{7}} = a_{\underline{8}\underline{8}} = a_{\underline{9}\underline{9}}. \quad (30)$$

Из двух указанных наборов можно выбрать только два независимых преобразования подобия. Произведем поворот на угол $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ в плоскостях Y_1Y_2 и $Y_{11}Y_{12}$. Элементы матрицы $[P_1]$ такого преобразования примут вид:

$$p_{ij}^{(1)} = \begin{cases} p_{11}^{(1)} = p_{22}^{(1)} = p_{12}^{(1)} = p_{1010}^{(1)} = p_{1111}^{(1)} = p_{1011}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ p_{21}^{(1)} = p_{1110}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ p_{ii}^{(1)} = 1, \text{ при } i \neq 1, i \neq 2, i \neq 10, i \neq 11, \\ p_{ij}^{(1)} = 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (31)$$

Результат преобразования подобия (31) получим по формуле:

$$[A_1] = [P_1][A][P_1]^T. \quad (32)$$

Причем, в матрице $[A]$ изменятся только следующие блочные элементы:

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} 2A_1 + A_3 & 0 & \sqrt{2}A_1 \\ 0 & A_3 & 0 \\ \sqrt{2}A_1 & 0 & A_1 + A_3 \end{bmatrix}, \quad [A_{44}] = \begin{bmatrix} 2A_2 + A_4 & 0 & \sqrt{2}A_2 \\ 0 & A_4 & 0 \\ \sqrt{2}A_2 & 0 & A_2 + A_4 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$[A_{14}] = [A_{41}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2A_7 + A_8 & 0 & \sqrt{2}A_7 \\ 0 & A_8 & 0 \\ \sqrt{2}A_7 & 0 & A_7 + A_8 \end{bmatrix}.$$

Шаг 2. Выполним поворот на угол θ_2 в плоскостях Y_1Y_3 и $Y_{10}Y_{12}$. Для определения матрицы $[P_2]$, в соответствии с (26) и (29), вычислим необходимые соотношения:

$$\operatorname{tg} 2\theta_2 = \tau_2^{-1} = 2\sqrt{2}, \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \theta_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sin \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (34)$$

Тогда элементы матрицы вращения $[P_2]$ будут вычисляться согласно:

$$p_{ij}^{(2)} = \begin{cases} p_{11}^{(2)} = p_{33}^{(2)} = p_{1010}^{(2)} = p_{1212}^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ p_{13}^{(2)} = p_{1012}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ p_{31}^{(2)} = p_{1210}^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ p_{ii}^{(2)} = 1, \text{ при } i \neq 1, i \neq 2, i \neq 10, i \neq 12, \\ p_{ij}^{(2)} = 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (35)$$

В результате следующего преобразования подобия

$$[A_2] = [P_2][A_1][P_2]^T, \quad (36)$$

изменяться те же самые блоки, что и на первом шаге алгоритма по формулам:

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= \text{diag}[3A_1 + \frac{A}{3}, \frac{A}{3}, \frac{A}{3}], \quad [A_{44}] = \text{diag}[3A_2 + \frac{A}{4}, \frac{A}{4}, \frac{A}{4}], \\ [A_{14}] &= [A_{41}] = \frac{1}{2} \text{diag}[3A_7 + \frac{A}{8}, \frac{A}{8}, \frac{A}{8}]. \end{aligned} \quad (37)$$

После выполнения первого и второго многомерных поворотов получаем трехдиагональную матрицу $[A_2]$.

Шаг 3. Вычислим угол поворота θ_3 в плоскости $Y_1 Y_{10}$ для определения матрицы $[P_3]$, в соответствии с (26) и (29), достаточно вычислить τ_3 :

$$\tau_3 = \text{ctg} 2\theta_3 = \frac{3A_1 - 3A_2 + \frac{A}{3} - \frac{A}{4}}{\frac{A}{7} + \frac{A}{8}}. \quad (38)$$

Тогда элементы матрицы преобразования подобия $[P_3]$ будут вычисляться согласно:

$$p_{ij}^{(3)} = \begin{cases} p_{11}^{(3)} = p_{1010}^{(3)} = \cos \theta_3, \\ p_{110}^{(3)} = \sin \theta_3, \\ p_{101}^{(3)} = -\sin \theta_3, \\ p_{ii}^{(3)} = 1, \text{ при } i \neq 1, i \neq 10, \\ p_{ij}^{(3)} = 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (39)$$

В результате следующего преобразования подобия:

$$[A_3] = [P_3][A_2][P_3]^T, \quad (40)$$

изменяться те же самые блоки, что и на первом шаге алгоритма по формулам:

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= \text{diag}[3A_1 + 3A_2 + \frac{A}{3} + \frac{A}{4} + \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + \frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + (3\frac{A}{7} + \frac{A}{8})^2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{3}], \\ [A_{44}] &= \text{diag}[3A_1 + 3A_2 + \frac{A}{3} + \frac{A}{4} - \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + \frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + (3\frac{A}{7} + \frac{A}{8})^2}, \frac{A}{4}, \frac{A}{4}], \\ [A_{14}] &= [A_{41}] = \frac{1}{2} \text{diag}[0, \frac{A}{8}, \frac{A}{8}]. \end{aligned} \quad (41)$$

Шаг 4. В силу полученной на предыдущем шаге матрицы квадратичной формы можно объединить повороты в плоскостях $Y_2 Y_{11}$, $Y_3 Y_{12}$, $Y_4 Y_{13}$, $Y_5 Y_{14}$, $Y_6 Y_{15}$. При этом, угол поворота θ_4 определяется из соотношения:

$$\tau_4 = \text{ctg} 2\theta_4 = \frac{3A_1 - 3A_2 + \frac{A}{3} - \frac{A}{4}}{\frac{A}{7} + \frac{A}{8}}. \quad (42)$$

Элементы матрицы преобразования подобия $[P_3]$ на текущем шаге алгоритма будут вычисляться согласно:

$$p_{ij}^{(4)} = \begin{cases} p_{22}^{(4)} = p_{33}^{(4)} = p_{44}^{(4)} = p_{55}^{(4)} = p_{66}^{(4)} = \cos \theta_4, \\ p_{11\ 11}^{(4)} = p_{12\ 12}^{(4)} = p_{13\ 13}^{(4)} = p_{14\ 14}^{(4)} = p_{15\ 15}^{(4)} = \cos \theta_4, \\ p_{21}^{(4)} = p_{32}^{(4)} = p_{43}^{(4)} = p_{54}^{(4)} = p_{65}^{(4)} = \sin \theta_4, \\ p_{11\ 2}^{(4)} = p_{12\ 3}^{(4)} = p_{13\ 4}^{(4)} = p_{14\ 5}^{(4)} = p_{15\ 6}^{(4)} = -\sin \theta_4, \\ p_{ii}^{(4)} = 1, \text{ при } i \neq 2, \dots, 6, i \neq 11, \dots, 15, \\ p_{ij}^{(4)} = 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (43)$$

В результате следующего преобразования подобия

$$[A_4] = [P_4][A_3][P_4]^T, \quad (44)$$

получим

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= \text{diag}[3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 + \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}, \\ &\quad \frac{1}{2}(A_3 + A_4 + \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}), \frac{1}{2}(A_3 + A_4 + \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2})], \\ [A_{44}] &= \text{diag}[3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 - \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}, \\ &\quad \frac{1}{2}(A_3 + A_4 - \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}), \frac{1}{2}(A_3 + A_4 - \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2})], \\ [A_{22}] &= (A_3 + A_4 + \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}) \text{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{55}] &= (A_3 + A_4 - \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}) \text{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{14}] &= [A_{41}] = [A_{25}] = [A_{52}] = [0]. \end{aligned} \quad (45)$$

Блочные элементы $[A_{33}]$, $[A_{66}]$, $[A_{36}]$, $[A_{63}]$ при этом не изменяются.

Шаг 5. В силу полученной на предыдущем шаге матрицы квадратичной формы можно объединить повороты в плоскостях $\underline{Y}_7 \underline{Y}_{16}$, $\underline{Y}_8 \underline{Y}_{17}$, $\underline{Y}_9 \underline{Y}_{18}$. При этом, угол поворота θ_5 определяется из соотношения:

$$\tau_5 = \text{ctg} 2\theta_5 = \frac{A_5 - A_6}{A_9}. \quad (46)$$

Элементы матрицы преобразования подобия $[P_3]$ на текущем шаге алгоритма будут вычисляться согласно:

$$p_{ij}^{(5)} = \begin{cases} p_{77}^{(5)} = p_{88}^{(5)} = p_{99}^{(5)} = \cos \theta_5, \\ p_{1616}^{(5)} = p_{1717}^{(5)} = p_{1818}^{(5)} = \cos \theta_5, \\ p_{716}^{(5)} = p_{817}^{(5)} = p_{918}^{(5)} = \sin \theta_5, \\ p_{167}^{(5)} = p_{178}^{(5)} = p_{189}^{(5)} = -\sin \theta_4, \\ p_{ii}^{(5)} = 1, \text{ при } i \neq 7, 8, 9, i \neq 16, 17, 18, \\ p_{ij}^{(5)} = 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (47)$$

В результате следующего преобразования подобия

$$[A_5] = [P_5][A_4][P_5]^T, \quad (48)$$

получим

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= \text{diag}[3A_1 + 3A_2 + \frac{A}{3} + \frac{A}{4} + \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + \frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + (3A_7 + \frac{A}{8})^2}, \\ &\quad \frac{1}{2}(\frac{A}{3} + \frac{A}{4} + \sqrt{(\frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + \frac{A^2}{8}}), \frac{1}{2}(\frac{A}{3} + \frac{A}{4} + \sqrt{(\frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + \frac{A^2}{8}})], \\ [A_{44}] &= \text{diag}[3A_1 + 3A_2 + \frac{A}{3} + \frac{A}{4} - \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + \frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + (3A_7 + \frac{A}{8})^2}, \\ &\quad \frac{1}{2}(\frac{A}{3} + \frac{A}{4} - \sqrt{(\frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + \frac{A^2}{8}}), \frac{1}{2}(\frac{A}{3} + \frac{A}{4} - \sqrt{(\frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + \frac{A^2}{8}})], \\ [A_{22}] &= (\frac{A}{3} + \frac{A}{4} + \sqrt{(\frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + \frac{A^2}{8}}) \text{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{55}] &= (\frac{A}{3} + \frac{A}{4} - \sqrt{(\frac{A}{3} - \frac{A}{4})^2 + \frac{A^2}{8}}) \text{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{33}] &= (\frac{A}{5} + \frac{A}{6} + \sqrt{(\frac{A}{5} - \frac{A}{6})^2 + \frac{A^2}{9}}) \text{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{66}] &= (\frac{A}{5} + \frac{A}{6} - \sqrt{(\frac{A}{5} - \frac{A}{6})^2 + \frac{A^2}{9}}) \text{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{14}] &= [A_{41}] = [A_{25}] = [A_{52}] = [A_{36}] = [A_{63}] = [0]. \end{aligned} \quad (49)$$

В результате выполнения пяти шагов преобразование подобия приводящее матрицу $[A]$ к диагональному виду можно получить согласно формуле:

$$[\Pi_5] = [P_5][P_4][P_3][P_2][P_1]. \quad (50)$$

Матрица канонической квадратичной формы будет определяться преобразованием подобия:

$$[A]_{\text{diag}} = [\Pi_5][A][\Pi_5]^T = [A_5]. \quad (51)$$

Причем переход от старых переменных $[Y]$ к новым переменным $[X]$ осуществляется с помощью изометрического преобразования согласно:

$$[X] = [\Pi_5][Y]. \quad (52)$$

3. Положительная определенность квадратичной энергетической формы. Положительная определенность квадратичной энергетической формы (19) и, тем самым, устойчивость равновесия линейного микрополярного упругого тела [14] обеспечивается следующими очевидными неравенствами

$$\alpha_s > 0 \quad (s = 1, \dots, 18). \quad (53)$$

Система неравенств (53) с учетом кратных собственных чисел примет вид:

$$\begin{cases} A_3 + A_4 > \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ A_3 + A_4 > -\sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ A_5 + A_6 > \sqrt{(A_5 - A_6)^2 + A_9^2}, \\ A_5 + A_6 > -\sqrt{(A_5 - A_6)^2 + A_9^2}, \\ 3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 > \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}, \\ 3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 > -\sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}. \end{cases} \quad (54)$$

Кроме того, второе, четвертое и шестое неравенства в (54) заведомо выполняются в силу первого, третьего и пятого неравенств. Поэтому систему неравенств (54) можно представить в виде:

$$\begin{cases} A_3 + A_4 > \sqrt{(A_3 - A_4)^2 + A_8^2}, \\ A_5 + A_6 > \sqrt{(A_5 - A_6)^2 + A_9^2}, \\ 3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4 > \sqrt{(3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2}. \end{cases} \quad (55)$$

Избавимся в системе неравенств (55) от радикалов, возведя их в квадрат. Тогда получим неравенства:

$$\begin{aligned} (A_3 + A_4)^2 &> (A_3 - A_4)^2 + A_8^2, \\ (A_5 + A_6)^2 &> (A_5 - A_6)^2 + A_9^2, \\ (3A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4)^2 &> (3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4)^2 + (3A_7 + A_8)^2, \end{aligned} \quad (56)$$

которые после несложных преобразований примут вид:

$$\begin{aligned} 4A_3 A_4 &> A_8^2, \\ 4A_5 A_6 &> A_9^2, \\ 4(3A_1 + A_3)(3A_2 + A_4) &> (3A_7 + A_8)^2. \end{aligned} \quad (57)$$

Преобразуем систему неравенств (57) к виду:

$$\begin{aligned} -C_I &< A_8 < C_I, \\ -C_{II} &< A_9 < C_{II}, \\ -C_{III} &< 3A_7 + A_8 < C_{III}. \end{aligned} \quad (58)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} C_I^2 &= 4A_3A_4 > 0, \\ C_{II}^2 &= 4A_5A_6 > 0, \\ C_{III}^2 &= 4(3A_1 + A_3)(3A_2 + A_4) > 0, \\ \text{sign}C_I &= \text{sign}C_{II} = \text{sign}C_{III} = +1. \end{aligned} \quad (59)$$

Система неравенств (58) может трактоваться как 3 двусторонних неравенства или 6 — односторонних. Очевидно, что левые части неравенств в (59) неотрицательны в силу (57).

Коэффициенты квадратичной формы A_a ($a = 1, \dots, 9$) в A -представлении энергии деформаций (8) могут быть заменены альтернативными определяющими константами гемитропного микрополярного упругого тела [14]:

$$\begin{aligned} A_1 &= G\nu(1 - 2\nu)^{-1}, & A_2 &= GL^2c_3, & A_3 &= G, \\ A_4 &= GL^2, & A_5 &= 2Gc_1, & A_6 &= GL^2c_2, \\ A_7 &= GLc_4, & A_8 &= GLc_5, & A_9 &= GLc_6, \end{aligned} \quad (60)$$

где G — модуль сдвига упругости; ν — коэффициент Пуассона; L — характеристическая микродлина теории микрополярной упругости; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — безразмерные константы.

Тогда, учитывая представления (60) гемитропных механических модулей, неравенства (58) и (59) примут вид:

$$\begin{aligned} -C_I &< GLc_5 < C_I, & C_I^2 &= 4G^2L^2 > 0, \\ -C_{II} &< GLc_6 < C_{II}, & C_{II}^2 &= 8G^2L^2c_1c_2 > 0, \\ -C_{III} &< GL(3c_4 + c_5) < C_{III}, & C_{III}^2 &= 4G^2L^2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} (1+3c_3) > 0. \end{aligned} \quad (61)$$

После несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} -2 &< c_5 < 2, & c_1c_2 &> 0, \\ -2\sqrt{2c_1c_2} &< c_6 < 2\sqrt{2c_1c_2}, & \frac{1+\nu}{1-2\nu} (1+3c_3) &> 0, \\ -2\sqrt{\frac{1+\nu}{1-2\nu} (1+3c_3)} &< GL(3c_4 + c_5) < 2\sqrt{\frac{1+\nu}{1-2\nu} (1+3c_3)}. \end{aligned} \quad (62)$$

Следует отметить, что система неравенств (61) эквивалентна системе неравенств полученных в работе [26], где рассматривался метод отделения квадратов Лагранжа.

Неравенства устойчивости равновесного состояния для изотропного микрополярного твердого тела, могут быть получены путем редукции неравенств (61) или (62) вследствие предельного перехода: $c_4 \rightarrow 0$, $c_5 \rightarrow 0$, $c_6 \rightarrow 0$. В итоге для изотропной микрополярной упругой среды имеем

$$4G^2L^2 > 0, \quad 8G^2L^2c_1c_2 > 0, \quad 4G^2L^2\frac{1+\nu}{1-2\nu}(1+3c_3) > 0. \quad (63)$$

Откуда, очевидно, возникает возможность снять ограничения на определяющие постоянные G и L , и в результате получить два существенных неравенства:

$$c_1c_2 > 0, \quad \frac{1+\nu}{1-2\nu}(1+3c_3) > 0. \quad (64)$$

Следует подчеркнуть, что последнее неравенство в (64) указывает на существование ауксетиков среди микрополярных твердых тел, а определяющая константа c_3 играет важную роль, аналогичную коэффициенту Пуассона ν , известному из закона упругости Гука, и может быть названа вторым микрополярным коэффициентом Пуассона.

Заключительные замечания и выводы. В настоящем исследовании рассмотрено приведение к каноническому виду (диагонализация) квадратичной энергетической формы гемитропной микрополярной упругой среды методом последовательных плоских поворотов Якоби. Энергия деформации рассматривается как функция, зависящая от несимметричных тензоров деформации и изгиба-кручения, которые трактуются как термодинамические переменные состояния. Кроме того, она может одновременно рассматриваться как потенциал силовых и моментных напряжений. Обобщая результаты исследования, приходим к следующим выводам:

- (1) Получено изометрически инвариантное А-представление квадратичной формы энергии деформации гемитропного микрополярного упругого твердого тела, определяемое 9 изоэнтропийными (адиабатическими) механическими модулями.
- (2) Для оперирования с А-представлением введены формальные переменные $Y_1, \dots, Y_{18}$.
- (3) Квадратичная форма энергии деформации приводится к сумме квадратов методом последовательных поворотов Якоби. Для диагонализации матрицы квадратичной формы оказалось достаточно 5 шагов алгоритма.
- (4) В результате применения метода Якоби на главной диагонали итоговой матрицы квадратичной формы располагаются ее собственные числа, а итоговая матрица поворота определяет переход к новым координатам.
- (5) Найдены ограничения на определяющие механические модули, обеспечивающие таким образом положительную определенность квадратичной

формы энергии деформации и устойчивость равновесия микрополярного упругого твердого тела.

- (6) Показана эквивалентность систем неравенств полученных методом Лагранжа и методом Якоби. Характерные отличия двух указанных методов сведем в Таблицу.

Метод Лагранжа	Метод Якоби
Невырожденное преобразование	Ортогональное/изометрическое преобразование, за вычетом зеркальных отражений, т.е. поворот
Диагональная матрица	Диагональная матрица
Диагональные элементы матрицы квадратичной формы — обязательно собственные значения	Диагональные элементы матрицы квадратичной формы — собственные значения
Изменяет метрику пространства	Сохраняет метрику пространства
Проще для ручного счета, но не выдает на выходе собственные значения	Сложен для реализации, но на выходе получаются собственные значения
Только целые рациональные операции	В ходе вычислений возникают иррациональности, требуется извлечение квадратных радикалов

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124013000674-0).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124013000674-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Wilkinson J. The algebraic eigenvalue problem. Т. 662. – Oxford : Clarendon Press, 1965.
2. Бахвалов Н. Численные методы (анализ, алгебра, дифференциальные уравнения). – Москва : Наука, 1975.
3. Johnson C., Horn R. Matrix analysis. – Cambridge : Cambridge university press, 1985.

4. Jacobi C. G. Ueber eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden lineären Gleichungen // *Astronomische Nachrichten*. – 1845. – Т. 22, № 20. – С. 297–306.
5. Jacobi C. Über ein leichtes Verfahren die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen*). // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. – 1846. – Т. 30. – С. 51–94. – DOI: doi:10.1515/crll.1846.30.51.
6. Henrici P. On the speed of convergence of cyclic and quasicyclic Jacobi methods for computing eigenvalues of Hermitian matrices // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. – 1958. – Т. 6, № 2. – С. 144–162.
7. Wilkinson J. Note on the quadratic convergence of the cyclic Jacobi process // *Numerische Mathematik*. – 1962. – Т. 4, № 1. – С. 296–300.
8. Cosserat E. M. P., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – VI+226.
9. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. – Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. – viii+383.
10. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. – 1966. – Т. 2. – С. 48–69. – DOI: 10.1007/BF01176729.
11. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964*. – Springer. 1966. – С. 153–158. – DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
12. Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / под ред. E. Kröner. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. – С. 109–113.
13. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. – xv+345. – (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
14. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. – 2018. – Т. 22, вып. 3. – С. 504–517. – DOI: 10.14498/vsgtu1635.
15. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. – 2022. – 3(53). – С. 86–100. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
16. Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // *Acta Mechanica*. – 1974. – Т. 20. – С. 105–131.
17. Gibbs J. On the equilibrium of heterogeneous substances // *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*. – 1875. – Т. 3. – 108–248 and 343–524.
18. Радаев Ю., Мурашкин Е. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2020. – Т. 82, № 4. – С. 399–412. – DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
19. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. – 2022. – 4(54). – С. 108–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.

20. Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2023. – 1(55). – С. 110–121. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
21. Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2023. – Т. 44, № 6. – С. 2440–2449. – DOI: 10.1134/S1995080223060392.
22. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2024. – Т. 45, № 5. – С. 2378–2390. – DOI: 10.1134/S1995080224602480.
23. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2025. – Т. 46, № 5. – С. 2391–2400. – DOI: 10.1134/S1995080225606514.
24. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. – М., Л. : ГИТТЛ, 1948. – 408 с. – [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
25. Спенсер Э. Теория инвариантов. – Мир, 1974.
26. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Диагонализация энергетической формы гемитропного тела и система определяющих неравенств. Метод отделения квадратов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – Самара, 2026. – Т. 30, ??

REFERENCES

1. *Wilkinson J.* The algebraic eigenvalue problem. Vol. 662. – Oxford : Clarendon Press, 1965.
2. *Bakhvalov N.* Chislennyye metody (analiz, algebra, differentsialnye uravneniya). – Moskva : Nauka, 1975.
3. *Johnson C., Horn R.* Matrix analysis. – Cambridge : Cambridge university press, 1985.
4. *Jacobi C. G.* Ueber eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden lineären Gleichungen // Astronomische Nachrichten. – 1845. – Vol. 22, no. 20. – P. 297–306.
5. *Jacobi C.* Über ein leichtes Verfahren die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen*). // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1846. – Vol. 30. – P. 51–94. – DOI: doi:10.1515/crll.1846.30.51.
6. *Henrici P.* On the speed of convergence of cyclic and quasicyclic Jacobi methods for computing eigenvalues of Hermitian matrices // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1958. – Vol. 6, no. 2. – P. 144–162.
7. *Wilkinson J.* Note on the quadratic convergence of the cyclic Jacobi process // Numerische Mathematik. – 1962. – Vol. 4, no. 1. – P. 296–300.
8. *Cosserat E. M. P., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – VI+226.
9. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. – Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. – viii+383.

10. *Neuber H.* Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. – 1966. – Vol. 2. – P. 48–69. – DOI: 10.1007/BF01176729.
11. *Neuber H.* On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964*. – Springer. 1966. – P. 153–158. – DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
12. *Neuber H.* On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / ed. by E. Kröner. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. – P. 109–113.
13. *Dyzlewicz J.* Micropolar Theory of Elasticity. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. – xv+345. – (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
14. *Radaev Y. N.* Pravilo mnozhitel'ey v kovariantnykh formulirovках mikropolyarnykh teoriy mekhaniki kontinuum // *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*. – 2018. – Vol. 22, iss. 3. – P. 504–517. – DOI: 10.14498/vsgtu1635. – (in Russian).
15. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* O dvukh osnovnykh estestvennykh formakh potentsiala asimmetrichnykh tenzorov silovykh i momentnykh napryazheniy v mekhanike gemitropnykh tel // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya*. – 2022. – 3(53). – P. 86–100. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010. – (in Russian).
16. *Besdo D.* A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // *Acta Mechanica*. – 1974. – Vol. 20. – P. 105–131.
17. *Gibbs J.* On the equilibrium of heterogeneous substances // *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*. – 1875. – Vol. 3. – 108–248 and 343–524.
18. *Radaev Y., Murashkin E.* Psevdotenzornaya formulirovka mekhaniki gemitropnykh mikropolyarnykh sred // *Problemy prochnosti i plastichnosti*. – 2020. – Vol. 82, no. 4. – P. 399–412. – DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
19. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Privedenie estestvennykh form gemitropnykh energeticheskikh potentsialov k konventsionalnym // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya*. – 2022. – 4(54). – P. 108–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009. – (in Russian).
20. *Murashkin E. V.* O svyazi mikropolyarnykh opredelyayushchikh parametrov termodinamicheskikh potentsialov sostoyaniya // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya*. – 2023. – 1(55). – P. 110–121. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012. – (in Russian).
21. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – Russian Federation, 2023. – Vol. 44, no. 6. – P. 2440–2449. – DOI: 10.1134/s1995080223060392.

22. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2024. – Vol. 45, no. 5. – P. 2378–2390. – DOI: 10.1134/S1995080224602480.
23. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2025. – Vol. 46, no. 5. – P. 2391–2400. – DOI: 10.1134/S1995080225606514.
24. *Gurevich G. B.* Osnovy teorii algebraicheskikh invariantov. – M., L. : GITTL, 1948. – 408 p. – [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
25. *Spenser E.* Teoriya invariantov. – Mir, 1974.
26. *Murashkin E. V., Radaev Y. N.* Diagonalizatsiya energeticheskoy formy gemitropnogo tela i sistema opredelyayushchikh neravenstv. Metod otdeleniya kvadratov // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki. – Samara, 2026. – Vol. 30, ?? – (in Russian).