

А. Н. Богданов¹, А. Г. Петров²

О НАУЧНОМ НАСЛЕДИИ ОЛЕГА ВАСИЛЬЕВИЧА ВОИНОВА

¹Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. Олег Васильевич Воинов (1944–2024) принадлежит к знаменитому поколению советских ученых-механиков. Его отношение к работе отличала глубина разработки научных проблем, тщательность анализа полученных результатов. Им был получен ряд пионерских научных результатов в разных областях механики жидкости и газа. Широкую известность в мировой научной литературе получила статья «Гидродинамика смачивания», опубликованная в 1976 году в журнале "Известия АН СССР. Механика жидкости и газа" и к настоящему времени имеющая более 1350 ссылок в Шпрингере, (каждый год это число увеличивается примерно на 100 ссылок). В указанной работе для объяснения опытов, проведенных химиками, автор первым применил методы механики сплошной среды. Многие результаты О.В. Воинова имеют большое прикладное значение. Публикуемые материалы ярко характеризуют и советское университетское образование 1960-х годов.

Ключевые слова: О.В. Воинов, гидродинамика, метод граничных элементов, многофазные среды.

Богданов Андрей Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник НИИ механики; e-mail: bogdanov@imec.msu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9541-0579>

Петров Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории механики систем; e-mail: petrov@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0618-2285>; AuthorID: 14501



для цитирования: Богданов А. Н., Петров А. Г. О научном наследии Олега Васильевича Воинова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 184–207. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.009. EDN: OZNODB

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A. N. Bogdanov¹, A. G. Petrov²

ON THE SCIENTIFIC LEGACY OF OLEG VASILYEVICH VOINOV

¹Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

²Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. Oleg Vasilyevich Voinov (1944–2024) belongs to a renowned generation of Soviet mechanical engineers. His approach to his work was distinguished by the depth of his research into scientific problems and the meticulous analysis of his results. He obtained a number of pioneering scientific results in various fields of fluid and gas mechanics. His article "Wetting Hydrodynamics," published in 1976 in the journal "Izvestiya AN SSSR: Mechanics of Liquids and Gases," gained widespread recognition in the international scientific literature. It currently has over 1,350 citations in Springer (this number increases by approximately 100 citations each year). In this work, the author was the first to apply methods of continuum mechanics to explain experiments conducted by chemists. Many of O.V. Voinov's results have significant practical application. The published materials vividly characterize Soviet university education in the 1960s.

Keywords: O.V. Voinov, hydrodynamics, boundary element method, multiphase media.

Andrey N. Bogdanov, Cand. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Leading Research Fellow, Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University; e-mail: bogdanov@imec.msu.ru;

<https://orcid.org/0000-0001-9541-0579>

Alexander G. Petrov, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Chief Research Fellow, Laboratory of Mechanics of Systems; e-mail: petrov@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-0618-2285>; AuthorID: 14501



to cite this article: Bogdanov A. N., Petrov A. G. On the scientific legacy of Oleg Vasilyevich Voinov // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 184–207. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.009

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Олег Васильевич родился в Москве в семье инженера¹. Отец, Василий Иванович Войнов, состоялся в профессии, был автором ряда авторских свидетельств еще с довоенных времен, в том числе «Башмак металлических колонн» (1933), «Способ соединения металлических конструкций» (1934), «Перегрузочный мост с ездой по низу» (1944, в соавторстве с ведущим советским специалистом в области строительной механики и теории металлических конструкций Николаем Прокофьевичем Мельниковым), «Монтажный стык неразрезных балок» (1951), «Эстакада» (1955), а также некоторых других, неподлежащих опубликованию (секретных). Олег гордился отцом, рассказывал об его участии в создании организации – флагмана отечественной авиационной техники – ЦАГИ имени проф. Н.Е. Жуковского, сотрудничестве с самим С.А. Чаплыгиным. К несчастью Войнов-старший рано ушел из жизни сына, тогда еще школьника, утонув во время купания в Черном море 22 августа 1960 года. Мама, Вера Ивановна (1903–1990), получила гимназическое образование, свободно владела французским языком, работала экономистом, однако еще в период ученичества младшего сына уже не могла трудиться по состоянию здоровья.

Старший брат Олега, Владимир (1940–2012) после школы поступил на физический факультет МГУ. Вероятно, под его влиянием Олег также решил получить профессию ученого-физика. Впрочем, его школьные оценки были отличными только по естественным (десяти включенным в аттестат о среднем образовании) предметам и лишь хорошими – по (шести) гуманитарным. Школьником он посещал математический кружок, ряд лет был его старостой, а также участвовал в математических олимпиадах. Однако при поступлении на физический факультет МГУ его постигла неудача – он получил низкую оценку на

¹Архив МГУ. Фонд № 2. Опись № 5л. Ед. хр. 192. Коробка № 13.

устном экзамене, не смог отстоять более высокую на апелляции. Тогда он подал документы на отделение механики механико-математического факультета МГУ и успешно сдал туда вступительные экзамены в том же, 1961, году. Его письменная работа по математике получила оценку хорошо, устный экзамен по математике он сдал на отлично, физику – на отлично, иностранный язык – на удовлетворительно. Его сочинение на тему «Мы рождены, чтоб сказку сделать былью», и с эпиграфом «Сегодня мы не на параде, мы к коммунизму на пути», с первым предложением – «В какое удивительное время мы живем!» также получило только удовлетворительную оценку – экзаменатором было указано: «тема раскрыта правильно, достаточно полно, содержание изложено логично, убедительно», но в работе имелись ошибки, и хотя их было всего три (!): слово «Программа» (имелась в виду Программа КПСС) Олег написал с маленькой буквы и ни к месту поставил две запятые – рука экзаменатора дрогнула, и первоначальная оценка хорошо была исправлена на удовлетворительно... Впрочем, набранных баллов оказалось вполне достаточно для зачисления в студенты.

В начале обучения Олега Воинова в университете материальные условия их семьи из двух студентов и пенсионера были очень скромными, и он поставил себе задачу учиться на отлично, на повышенную стипендию. Не сразу (была даже и двойка по математическому анализу за второй семестр, пересданная на тройку), но к третьему семестру он своей цели достиг, даже на отлично сдав в этот раз экзамен самой Зое Михайловне Кишкиной²(!). Теоретическую механику за 5-й семестр он на отлично сдал весьма строгому экзаменатору – Л.Н. Сретенскому (вероятно, Леонид Николаевич не сразу убедился в знаниях экзаменуемого – первоначально поставленную оценку хорошо он потом собственноручно переправил на отлично, сопроводив комментарием – исправленному верить). С третьего курса Олег получал повышенную стипендию (тогда, в 1964 году, это было 56 рублей 25 копеек).

Студентом он был романтиком, дважды ездил на целину, был командиром студенческих стройотрядов. Характеризовался как способный, активно участвующий в учебном процессе студент: «активно посещает спецсеминар», «сделал несколько интересных докладов», «с большим интересом и упорством относится к изучению своей специальности», вместе с тем – «очень активно участвует в работе семинаров по общественным наукам, выступления на этих семинарах продуманы и интересны», при этом – «принципиален во всех вопросах». Как

²И.В. Новожилов: «С благоговейным трепетом наше поколение мехматчиков пятидесятых годов вспоминает Зою Михайловну Кишкину и Наталию Алексеевну Айзенштадт. Они вели упражнения по матанализу на первых двух курсах. Любили нас и драли по семь шкур. Десятью интегралов за одно домашнее задание – это Вам не сочинение на вольную тему. Как новобранца делает солдатом старшина, так и наше поколение сделали людьми незабвенные Зоя Михайловна и Наталья Алексеевна».

вспоминает одноклассник Олега В.В. Прокофьев, в учебе Воинову было присуще необыкновенное упорство, так, при выполнении задачи по физмехпрактикуму легендарный преподаватель Л.А. Шенявский³ задал им двоим вопрос об определении интегральной излучающей способности твердого тела. Получив два разных ответа, Лев Александрович порекомендовал им, посоветовавшись, выработать общее мнение и сообщить его ему. Окажется оно правильным – обоим зачет, нет – не обессудьте. В последовавшем выяснении существа Олег защищал свое мнение упорно, даже очень упорно, но все же истину установить удалось (кое в чем он все же уступил), зачет получили.

Отмечалась учебной частью и хорошая спортивная форма Олега.

Первым научным руководителем О.В. Воинова на 3-м курсе в 1963 году стал Г.Г. Черный, тогда чл.-корр АН СССР. Темой первой курсовой работы Олега стало исследование ползущих движений, рецензентом по выполнению оно было оценено на отлично. На следующем курсе Воинов занялся диффузионным разделением двухфазных потоков. Рецензировавший выполненную работу С.А. Регирер рекомендовал продолжить дальнейшие исследования по этой теме, которую квалифицировал как представляющую большой теоретический и практический интерес, но оценивший выполненную работу лишь на хорошо. Научный руководитель с этой оценкой согласился.

В 1965 году О.В. Воинов перешел на открывшуюся 1 сентября 1964 года на факультете новую кафедру химической механики⁴ к новому научному руководителю – В.В. Толмачеву. Производственную практику проходил в лаборатории новых процессов электробурения ЦКТБЭ (без зачисления в штат и начисления зарплаты).

Как студент-отличник учебы уже в феврале 1966 года Воинов получил рекомендацию в аспирантуру. Его дипломная работа «Применение диаграммного метода к изучению стационарной изотропной турбулентности» получила отличную оценку. Отзыв на нее научного руководителя, В.В. Толмачева, был краток – семь неполных строк («получен ряд интересных результатов»). Обстоятельный положительный отзыв на дипломный проект пришел из Института электрохимии («проявил себя способным математиком», «Работа выполненная им весьма трудоемка и технически сложна», «Дипломник нашел способ вычисления весьма сложных асимптотических интегралов»).

В 1966 году Олег Воинов с красным дипломом окончил мехмат по кафедре химической механики, лишь две оценки из 23 в дипломе были не отличными – высшая алгебра и та самая курсовая на 4-м курсе.⁵

³«Тщедушный маленький физик, у которого, казалось, ноги-спички растут прямо из спины, обладал железной волей и стойкими педагогическими принципами». Владимир Попов Этажи МГУ // «День и ночь». 2006. № 11.

⁴Механика в Московском университете / Под ред. И.А. Тюлиной, Н.Н. Смирнова. М.: Айрис-Пресс, 2005. 352 с. ISBN 5-8112-1474-X.

⁵Архив МГУ. Фонд № 51. Опись № 2л. Ед. хр. 64.

На вступительных экзаменах в аспирантуру Воинов отвечал на вопросы: «Зависимость числа степеней свободы в турбулентном потоке от числа Рейнольдса», «Сопротивление при ламинарном и турбулентном движении жидкости в трубе», «Уравнения Гамильтона», «Метод Фурье для решения уравнений в частных производных». Комиссия в составе В.Г. Левича, А.М. Головина, В.В. Карамышкина поставила отлично, на хорошо были сданы История КПСС и немецкий язык.

Научное руководство О. Воиновым продолжил В.В. Толмачев, темой диссертации были выбраны «Некоторые задачи движения многих сфер в идеальной жидкости». Через год Толмачева сменил А.М. Головин. Темой диссертационного исследования было утверждено «Движение жидкостей в присутствии поверхностно-активных веществ».

Были сданы экзамены кандидатского минимума. По философии Воинову было предложено ответить на вопросы:

«Философские взгляды Р. Декарта и Б. Спинозы и их историческое значение»

«Возможность и действительность. Категория вероятности. Особенности превращения возможности в действительность в природе и в обществе».

«Диктатура пролетариата и ее роль в социалистической революции. В.И. Ленин о сломе государственной машины».

«Специфика роли практики в развитии математики». Философия была сдана на отлично.

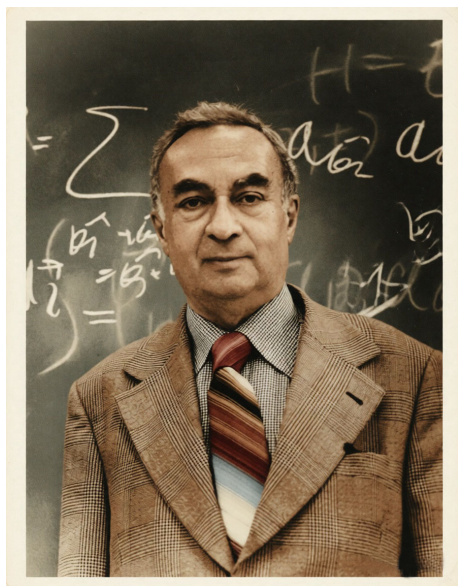
Экзамен по иностранному языку заключался в письменном переводе со словарем книги «Ordinary difference-differential equation», устном переводе без словаря и чтении той же книги, передаче на английском языке отрывка из газеты «Morning Star». Знание английского языка было оценено как удовлетворительное, экзамен принимали М.М. Глушко и Е.А. Снесарева. Заметим здесь, что студентом и школьником Воинов изучал немецкий язык.

Кандидатский экзамен по специальности включил вопросы:

«Теплопередача в окрестности критической точки при плоскопараллельном течении», «Зависимость степени ионизации водородной плазмы от температуры», «Температура в газовой среде вокруг излучающего точечного источника». Комиссия в составе В.Г. Левича, В.П. Мясникова, А.М. Головина поставила отлично.

Из дополнительных учебных курсов Воинов посещал лекции по статистической физике профессора А.М. Бродского.

На втором году аспирантуры тема диссертации была указана как «Об установлении распределения пузырей по размерам в результате процессов «слияния» и дробления». К этому времени Воиновым уже было получено точное решение задачи об одномерном столкновении двух пузырей в жидкости малой вязкости и рассмотрены две задачи об устойчивости пленок.



Вениамин Григорьевич Левич



Преподаватели кафедры химической механики. Не позднее 1972 г.

15 мая 1970 года О.В. Воинов защитил кандидатскую диссертацию на тему «Некоторые задачи гидродинамики и распределения тепла в системе нескольких тел»⁶, ее основные результаты были опубликованы в четырех статьях в журналах ПММ, Вестник МГУ, МЖГ, одних тезисах, одна статья была в печати. Официальными оппонентами на защите выступили М.И. Гуревич и Ю.Л. Якимов, ведущей организацией – Институт проблем механики АН СССР. Защита прошла в ученом совете механико-математического факультета МГУ под председательством Г.Г. Черного. В прениях по докладу соискателя выступил профессор Н.А. Слезкин, спросивший, чем отличаются полученные результаты в качественном отношении от результатов Бьеркнеса и какое значение будут

⁶Архив МГУ. Фонд № 51. Опись № 1л. Ед. хр. 58.

иметь решенные задачи для развития соответствующего научного направления? Ответ Воинова был кратким: «Знак сил взаимодействия остается таким же, как и на большом расстоянии». В отношении же технологических применений он указал, что непосредственной целью задачи ставился вопрос о движении системы пузырей при барботаже и построении кинетических уравнений для такой системы, это требует знания задачи о парном столкновении, а одна из решенных в диссертации задач сводилась к выяснению характера взаимодействия газового пузырька с твердой стенкой. Неудовлетворенный таким ответом, Слезкин повторил вопросы о значении результатов диссертанта и направлении, в котором они могут быть использованы. Воинов уточнил свой ответ, сообщив, что результаты могут быть использованы для составления кинетических уравнений, а в случае схлопывания пузырька у стенки позволяют решить вопрос о разрушающем воздействии этого процесса на стенку. Г.И. Баренблатт спросил о связи результатов соискателя с работами О. Нэйла и Стерциона. По мнению Воинова значение, в смысле отличия, имел лишь диапазон рассматриваемых чисел Рейнольдса, упомянутые же в вопросе работы относились к малым числам Рейнольдса, когда основную роль играет вязкость, а в выкладках появляются логарифмические члены. Отвечая на замечание в отзыве на автореферат диссертации об отсутствии сравнения с работами Бренера, Кокса и Мейсона, а также об отсутствии конкретных числовых значений в рассмотренных задачах, соискатель указал, что упомянутые работы относились к существенно другому направлению, а все конкретные примеры в диссертации как раз доведены до чисел, но, конечно, все практические задачи охватить невозможно. После выступления научного руководителя, А.М. Головина, последовал вопрос и к нему от В.М. Панферова – в чем законченность работы в смысле выхода? Руководитель ответил, что выполненная работа позволяет ответить на вопрос о месте захлопывания пузыря в рассмотренных диссертантом условиях, хотя совсем не обязательно, что такие условия будут иметь место в действительности. С замечаниями обоих оппонентов соискатель согласился. В выступлениях по диссертации Г.И. Баренблатт назвал постановку задачи классической и отметил, что диссертанту и его руководителю следует поставить в заслугу их занятия, но все же настаивал на проведении сравнения результатов соискателя с работами О. Нэйла и Стерциона. В последовавшем затем выступлении В.Г. Левич указал, что реши соискатель задачу не для одного пузырька, а для системы, дело завершилось бы докторской (да и для докторской эта задача была бы сложна), им было также отмечено, что он и сам затрудняется ответить на вопрос, как эта одна задача отражается на технических приложениях (и этим, по его мнению, объясняется не очень внятный ответ соискателя на заданный ему ранее вопрос). Особо Вениамином Григорьевичем была отмечена мехматовская выучка соискателя: «если бы не его образование, он усумнился бы в возможности применения метода Лагранжа», «он продемонстрировал умение решать довольно сложные математические задачи», но «это, как раз, пример того плохого, что у

нас есть, когда людей недостаточно приучают к приближенным вычислениям» – это тоже «выучка мехмата»» (Баренблатт с места – «Да, конечно!»).

Здесь уместно сделать замечание. Критика диссертации относилась больше не к соискателю, а к заведующему кафедрой – В.Г. Левичу. Н.А. Слезкин, будучи деканом механико-математического факультета МГУ с 1958 по 1962 год, был резко против создания кафедры химической механики на факультете и считал, что тема диссертации О.В. Воинова не оригинальна и эта работа могла бы выполняться на других кафедрах факультета.

Голосование по диссертации показало 21 голос за присуждение степени, один – против, один бюллетень был признан недействительным.

В октябре 1969 года О.В. Воинов по распределению поступил на работу в лабораторию олеоколлоидов и монослоев в Институт химической физики АН СССР, где быстро получил ряд уникальных научных результатов. В 1978 году он перешел на работу в созданный академиком В.В. Струминским в Москве Сектор механики неоднородных сред АН СССР. Там он работал в должности заместителя директора и в 1980 году защитил докторскую диссертацию «Динамика двухфазных систем с учетом изменения формы границ раздела фаз». Одним из оппонентов его диссертации был будущий академик Л.В. Овсянников. Однако после защиты Олег Васильевич, проявив принципиальное несогласие с административными действиями руководства, был вынужден покинуть это место работы. Научная деятельность была продолжена им в отраслевых организациях, а в 1989 году он был принят на работу в должности заведующего лабораторией в организованный академиком Р.И. Нигматулиным Институт механики многофазных систем СО РАН в Тюмени (с 1998 года это Тюменский филиал ИТПМ СО РАН). Это были сложные для науки, но плодотворные для научной деятельности Воинова годы.

Признанием заслуг О.В. Воинова перед наукой его коллегами служит его избрание членом Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике. В жизни он был скромным, отзывчивым, всегда готовым прийти на помощь, охотно делился с коллегами своими знаниями и научными идеями.

Олег Васильевич Воинов ушел из жизни 30 сентября 2024 года, на следующий день после своего 80-летия. Это – большая потеря для отечественной и мировой науки.

Настоящая статья – дань памяти многолетней дружбе и сотрудничеству А.Г. Петрова с О.В. Воиновым.

Обзор научных результатов. Научные интересы Олега Васильевича Воинова находились в различных областях гидродинамики: течения жидкости со свободными границами, механика многофазных сред.

Первый результат, ставший известным в гидродинамике, Олег Васильевич Воинов получил в 1970 г., это было обобщение рядов Хикса. Данное им точное решение для сил, действующих на движущиеся и пульсирующие сферы, в виде

быстро сходящихся рядов вплоть до контакта является основой для построения теории слияния пузырьков в жидкости.

В 1974 г. Воиновым совместно с М.И. Гуревичем выведены формулы для силы и момента, действующих на осесимметричное тело, ориентированное параллельно дну.

В 1974–1975 гг. Воинов О.В. разработал метод граничных интегральных уравнений для решения задач гидродинамики со свободными границами. В статье 1975 года «Гидродинамика смачивания» он изложил разработанную им теорию этого процесса, эта статья имеет в Шпрингере более 1300 ссылок. В 1975 году Воинов первым выполнил расчет кумулятивной струи при захлопывании кавитационного пузыря около стенки, создав при этом метод, который впоследствии стал называться методом граничных элементов. Эти результаты стали называться «задачей Воинова». Олег Васильевич является основоположником теории растекания тонких пленок.

В 1980-х годах он заложил основы теории растекания сверхтонких пленок по поверхности твердых тел, выполнил ряд пионерских работ по теории смачивания и моделям термокапиллярного движения эмульсии и газожидкостной смеси.

В 1981–1982 гг. Воинов определил кривую устойчивости осаждения и всплытия концентрированных систем твердых частиц и пузырьков в жидкости. Его теория имеет приложения для описания барботаж, эволюции псевдооживленного слоя, эмульсий, отделяя эффективные режимы от нежелательных.

В 2002 г. им было открыто явление кавитации при ползущем движении жидкости (малые числа Рейнольдса) и дано объяснение парадоксальных эффектов в опытах А.Н. Прокунина

В 2005 г. Воинов О.В. получил общую форму представления решения уравнений Стокса, в котором поля скорости и давления при осесимметричном обтекании тела представлены через две гармонические функции, которые определяются методом граничных элементов.

1. Гидродинамическое взаимодействие тел в жидкости. Для описания движущихся в жидкости двух сфер с произвольно меняющимися размерами, скоростями и взаимным расположением О.В. Воинов предложил пользоваться уравнениями Лагранжа, функцией Ланранжа в этой задаче является кинетическая энергия T , определенная Воиновым в виде быстро сходящихся рядов по степеням отношения радиуса сферы к расстоянию между сферами (как обобщение рядов Хикса для двух твердых сфер) [71–73]

$$\frac{T}{2\pi\rho} = \sum_{i=1}^2 (A_i u_i^2 + B u_i u_k + D_i \dot{a}_i^2 + E \dot{a}_i \dot{a}_k + C_{ik} u_i \dot{a}_k + C_{ii} u_i \dot{a}_i),$$

$$2A_i = \frac{a_i^3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_i}{A_n^i} \right)^3, \quad 2B = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{B_n^i} \right)^3,$$

$$D_i = a_i^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_i^3}{A_n^i} \left[1 + ((B_n^k)^2 - 1) \ln \left(1 - \frac{1}{(B_n^k)^2} \right) \right],$$

$$E = \frac{(a_1 a_2)^2}{a_k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{B_{n+1}^k} - B_n^i \ln \left(1 + \frac{1}{B_{n+1}^k B_n^i} \right) \right),$$

$$C_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_i^3}{(A_n^i)^2 B_n^k}, \quad C_{ki} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k^3}{(B_n^i)^2 A_{n-1}^k}, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2$$

$$B_n^i = \frac{r}{a_i} A_{n-1}^k - \frac{a_k}{a_i} B_{n-1}^i, \quad A_n^i = \frac{r}{a_i} B_n^k - \frac{a_k}{a_i} A_{n-1}^i, \quad n = 1, 2, \dots, \quad A_0^i = 1, \quad B_0^i = 0,$$

где ρ – плотность жидкости, a_i – радиусы сфер, r – расстояние между центрами сфер, скорость центра сферы $u_i > 0$, если она направлена к другой сфере. Были определены силы гидродинамического взаимодействия, в том числе и в контакте, например

1). При расширении сфер в контакте $r = 2a$, $a = -u$ сила притяжения была определена в виде (точкой над символом обозначено дифференцирование по времени)

$$F = 2\pi\rho a^2 (0.785a^2 + 0.18a\ddot{a})$$

2). При сближении сфер к контакту $r \rightarrow 2a$ с равными скоростями имеет место отталкивание с силой

$$F = \pi\rho a^2 u^2 \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{r}{a} - 2 \right) - 0.0948 \right)$$

3). При движении сфер в одном направлении в контакте отталкивание определяется силой (ζ – дзита-функция)

$$F = \pi\rho a^2 u^2 \left(\frac{3}{4} \zeta(3) - \ln 2 \right) = 0.2084\pi\rho a^2 u^2$$

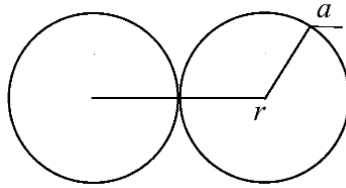


Рис. 1.

Точное решение Воинова для сил, действующих на движущиеся и пульсирующие сферы, представленное в виде быстро сходящихся рядов для всех стадий процесса сближения сфер вплоть до контакта, стало основой для построения теории слияния пузырьков в жидкости.

2. Сила, действующая на ориентированное параллельно дну осесимметричное тело. Совместно с М. И. Гуревичем Воиновым была решена следующая задача [54]. Осесимметричное тонкое тело движется параллельно дну на расстоянии c от него

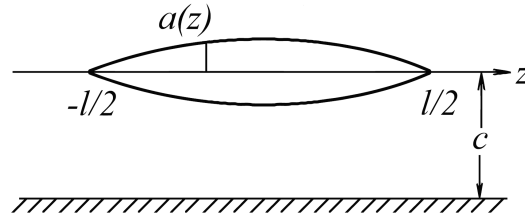


Рис. 2.

Радиус сечения на отрезке $z \in (-l/2, l/2)$ определяется произвольной функцией $a(z)$. Определены сила F и момент M , действующие на него

$$F = -\pi \rho u^2 \int_{-l/2}^{l/2} \frac{(aa')^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} dz, \quad M = -2\pi \rho \dot{u} \int_{-l/2}^{l/2} (c - \sqrt{c^2 - a^2}) aa'(z) z dz.$$

штрихом отмечено дифференцирование.

3. Метод граничных интегральных уравнений. О.В. Воиновым первым в мире был разработан метод граничных интегральных уравнений для решения задач динамики жидкости со свободной границей [56]. Внутренняя плоская или осесимметричная задачи для уравнения Лапласа была сведена им к решению интегрального уравнения

$$AV(s) + B\Phi(s) = 0,$$

а внешняя задача к интегральному уравнению

$$AV(s) + B\Phi(s) = 4\pi(C - \Phi(s))$$

Для интегральных операторов осесимметричной задачи были получены формулы ($\frac{\partial}{\partial n'}$ означает дифференцирование по нормали, относящейся к точке, переменной по контуру, рис. 3)

$$\begin{aligned} AV(s) &= - \int_0^l r(s') G(s, s') V(s') ds', \\ B\Phi(s) &= \int_0^l r(s') \frac{\partial G}{\partial n'}(s, s') (\Phi(s) - \Phi(s')) ds' G(s, s') = - \frac{8}{r_1 + r_2} K(k), \\ k &= \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}, \quad r_{1,2} = \sqrt{(z' - z)^2 + (r' \mp r)^2} \\ K(k) &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!} \right]^2 k^{2i} \right) = \frac{1}{\pi} K(\sqrt{1-k^2}) \ln \frac{16}{1-k^2} - h(\sqrt{1-k^2}) \end{aligned}$$

$$h(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left[\frac{(2i-1)!!}{2^i i!} \right]^2 \sum_{n=1}^i \frac{1}{(2n-1)n} \right] k^{2i}$$

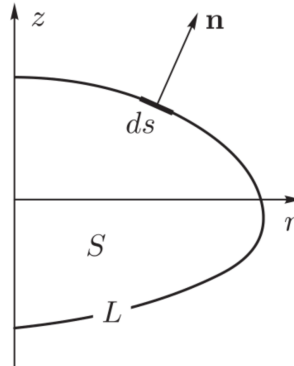


Рис. 3.

где интегралы берутся вдоль свободной границы течения жидкости, ds — элемент дуги контура.

Интегральные операторы имеют логарифмическое ядро, для интегрирования Воинов предложил квадратурные формулы

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau) \ln |\tau| d\tau = f(\tau_1)A_1 + f(\tau_2)A_2 + f(\tau_0)A_0, \quad \tau_0 = (\tau_1 + \tau_2)/2$$

точные для квадратичных функций $f(\tau) = a\tau^2 + b\tau + c$. A_i — квадратурные коэффициенты, вычисляемые из требования точности этой формулы для квадратного трехчлена при любых a, b, c .

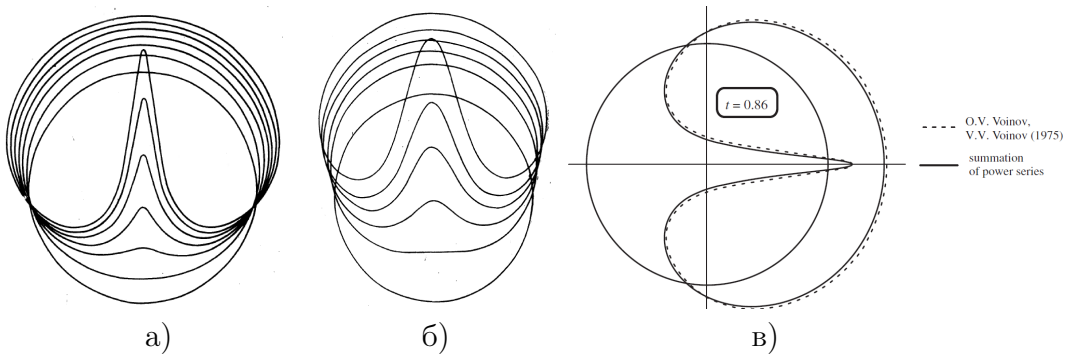


Рис. 4.

Разработанным методом О.В. Воинов провел ряд расчетов для всплытия пустой полости, в которой создается кумулятивная струя. Результаты изображены

на рис. 4а (плоская задача), рис. 4б (осесимметричная задача). Спустя 40 лет Карабут с соавторами⁷ построил точное решение задачи Воинова и привел сопоставление своего решения с расчетом Воинова на рис. 4в, показавшее очень хорошее согласие с точным решением.

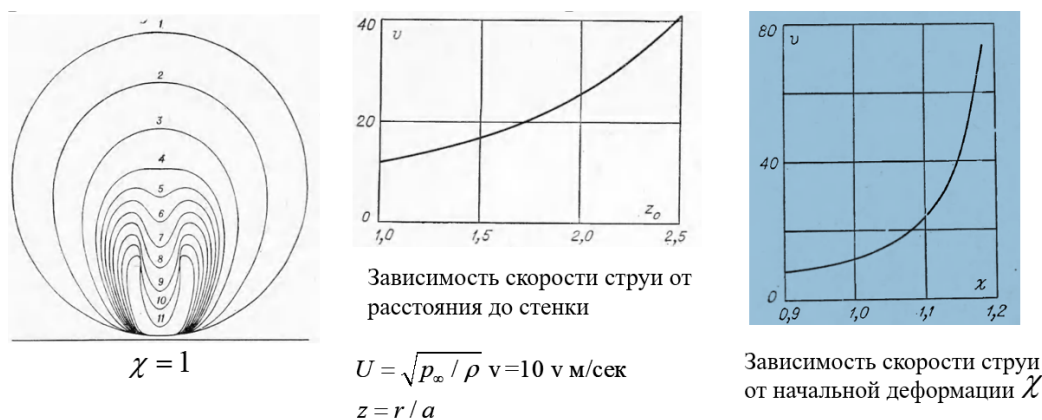


Рис. 5.

Для захлопывания пузырька возле плоскости (рис. 5а) Воинов проанализировал зависимость скорости кумулятивной струи от расстояния от стенки (рис. 5б) и от начальной формы пузырька эллипсоидальной формы с отношением осей $a/b = \chi$. Он показал, что на скорость и толщину кумулятивной струи сильно влияет начальная форма пузыря. Если его начальная форма –сплюснутый эллипсоид, то при изменении отношения осей от 1 до 1.18 скорость струи возрастает в 10 раз, от 180 м/с до 1800м/с, далее скорость струи неограниченно возрастает (рис. 5в). Эти результаты были опубликованы в ряде статей [44], [49], [59], [51], [53], [56].

Таким образом, Воинов разработал метод граничных элементов на три года раньше С.А. Brebbia, в 1978 году опубликовавшего работу “The Boundary Element Method for Engineers”⁸. Метод был применен Воиновым для расчета кумулятивных струй, направленных к плоскости, при схлопывании пузыря у ее поверхности. Недавнее сравнение с точным решением Карабута плоской задачи показало высокую точность расчетов Воинова⁹.

⁷Karabut E.A. Semi-analytical study of the Voynovs problem// European Journal of Applied Mathematics (2019), V. 30, pp. 298–337.

⁸Brebbia C.A.The Boundary Element Method for Engineers. London: Pentech Press. 1978. 189 p.

⁹Karabut E.A. Semi-analytical study of the Voynovs problem// European Journal of Applied Mathematics (2019), V. 30, pp. 298–337.

4. Растекание капель на твердых поверхностях. Первым в мире О.В. Воинов построил аналитическое решение задачи о растекании капли вязкой жидкости на твердой поверхности (рис. 6) [48].

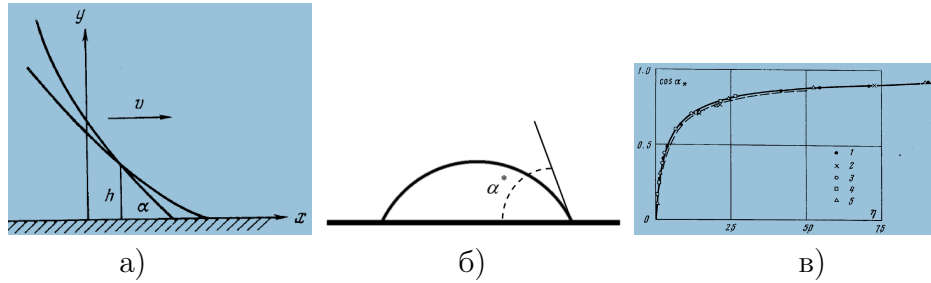


Рис. 6.

Эта задача изучалась экспериментально химиками. Воинов дал математическую постановку этой задачи

$$\begin{aligned} \nabla p &= \mu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ v_x &= -v, \quad v_y = 0, \quad \mathbf{v} \mathbf{n} = 0, \\ p_\tau &= 0, \quad p_n = -p_0 + q\sigma \end{aligned}$$

и свел ее решение к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\sigma}{9\mu} \left(\frac{\pi}{3V} \right)^{1/3} \frac{\alpha_m^3 - \alpha^2}{\ln(h/h_m) - 1} (1 - \cos \alpha)^{2/3} (2 + \cos \alpha)^{4/3}$$

α – краевой угол на сферическом сегменте, α_m – характеризует статический гистерезис краевого угла, α^* – угол, наблюдаемый в эксперименте.

Для безразмерного времени $\eta = t \frac{\sigma}{\mu} \left(\frac{\pi}{4V} \right)^{1/3}$ Воинов получил зависимость, которая совпала со всеми основными результатами экспериментов (рис. 6 в.).

Развитие его собственной теории представлено им в ряде статей [3, 5-7, 9, 12, 15, 18, 21, 23, 25-30, 32-36, 38, 45, 46, 55, 57].

5. Кавитация в тонких слоях вязкой жидкости. О.В. Воинов предложил простую формулу распределения давления между плоскостью и вращающимся эллипсоидом [14], дав таким образом объяснение парадокса А.Н. Прокунина. Ранее Прокуниным было установлено¹⁰, казалось бы, парадоксальное явление:

¹⁰Прокунин А.Н. Об одном парадоксе при движении твердой частицы вдоль стенки жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. № 3. 2003. с. 107–122.

тяжелый шар в вязкой жидкости скатывался с наклонной плоскости, оставляя зазор между собой и плоскостью. Как показывает решение задачи обтекания сферы около плоскости медленным потоком жидкости с большой вязкостью^{11, 12}, гидродинамическая сила направлена параллельно плоскости. Что же противодействует силе тяжести? И почему шар не осаждается до контакта с плоскостью.

Указанный образующийся зазор определяется формулой (см. рис. 7 а.)

$$h = h_0 + \frac{x^2 + y^2}{2R_s}.$$

Для распределения давления в этом зазоре Воинов получил формулу

$$p = p_\infty + \frac{6}{5}\mu(v + R_s\omega)xh^{-2}.$$

Давление имеет наименьшее значение

$$p_{\min} = p_\infty - \frac{9}{40}\mu(v + R_s\omega)R_s^{1/2}h_0^{-3/2}$$

При достаточно малом значении h_0 давление может стать отрицательным, что приводит к возникновению кавитации – в зазоре между плоскостью и шаром образуется пузырек. Размер пузырька очень мал, и он различим только при специальном рассмотрении. После теоретического предсказания Воинова Прокунин действительно усмотрел пузырек в своем опыте.

Воинов О.В. в статье [18] привел расчеты формы пузырьков, которые образуются в зазоре между плоскостью и шаром. В зависимости от отношения $\Lambda = \frac{p_\infty}{p_m}$, $p_m = \mu \frac{u}{h_0} \sqrt{\frac{R_s}{h_0}}$ формы пузырьков при Λ : 0.93; 0.79; 0.54; 0.3; 0.2; 0.1 приведены на рис. 7 б). Из-за пузырька возникает подъемная сила $F = C(\Lambda)\mu|u|R_s\sqrt{\frac{R_s}{h_0}}$ с коэффициентом $C(\Lambda)$, приведенном на графике рис. 7 в). Эта сила препятствует осаждению шара на плоскость.

Т.о. при объяснении парадокса Прокунина было открыто удивительное явление – кавитация в тонком слое жидкости при очень малом числе Рейнольдса.

6. Кривая устойчивости осаждения и всплытия концентрированных систем твердых частиц и пузырьков в жидкости. Псевдооживленный слой (или кипящий слой, gas-solidfluidization) – парящее состояние частиц твердого сыпучего материала под воздействием восходящего потока газа или смеси газ-жидкость (визуально сыпучий материал в таких условиях напоминает кипящую жидкость). Псевдооживленные слои нашли большое применение в различных отраслях промышленности – фармацевтической, химической, пищевой, косметической, а также биотехнологиях и т. п.

¹¹Goldman A.J., Cox R.G., Brenner H. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall// Cem. Eng. Sci. 1967. V.22. N4. P. 637-651.

¹²O'Neill M.E., Stewartson K. On the slow motion of a sphere parallel to a nearby plane wall// J. Fluid Mech. 1967. V.27. Pt 4. P. 705-724.

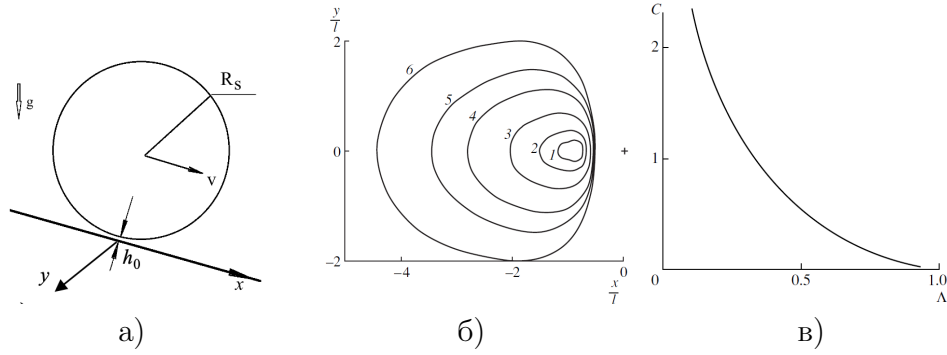


Рис. 7.

Основные стадии развития псевдооживленного слоя: неподвижное состояние, однородное (спокойное) кипение, неоднородное (пузырьковое) кипение, поршневой режим и пневмотранспорт (унос) (рис. 8.)

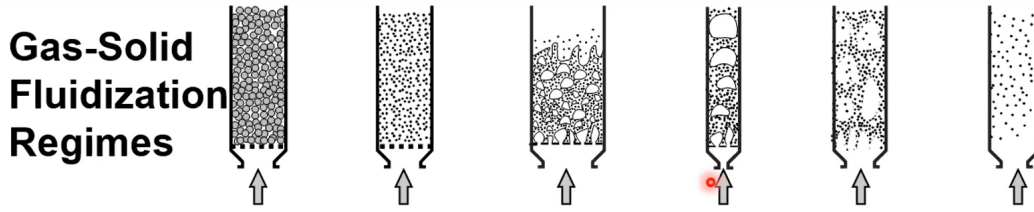


Рис. 8.

Режимы образования крупных пузырей (байпасирование), фонтанирование, шлакование, агломерация и чрезмерный вынос мелкодисперсных частиц, являются нежелательными. Они нарушают равномерность теплообмена, снижают эффективность работы аппаратов создания конечного продукта и могут привести к остановке рабочего процесса.

Воинов показал, что скорости твердых частиц в псевдооживленном слое складываются из средней скорости и хаотической флуктуации и для описания движения сильно концентрированной двухфазной среды предложил осредненные уравнения, подобные уравнениям турбулентности

$$\varepsilon \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varepsilon \rho \mathbf{g} - \nabla p - c \mathbf{F} + \operatorname{div} (-\varepsilon \rho \overline{\delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}}), \quad c \rho_s \frac{d\mathbf{u}}{dt} = c \rho_s \mathbf{g} + \operatorname{div} (-c \rho_s \overline{\delta \mathbf{u} \delta \mathbf{u}}) + c \mathbf{F},$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} (c \mathbf{u}) = 0, \quad \varepsilon + c = 1,$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad c \rho_s \overline{\delta u_i \delta u_j} = S w_i w_j, \quad c \mathbf{F} = -c \rho \mathbf{g} - \mu \frac{G}{R^2} \left(c \mathbf{w} + f R \frac{\mathbf{w}(\mathbf{w} \nabla c)}{|\mathbf{w}|} \right),$$

$$G(c), \quad S(Fr, c), \quad f(Fr, c), \quad Fr = \frac{w}{\sqrt{Rg}}.$$

где $\rho, \mathbf{v}$ – плотность и скорость несущей среды, $\rho_s, u, \varepsilon, c$ – плотность, скорость, пористость и концентрация частиц, $\mathbf{F}$ – сила межфазного взаимодействия, μ – коэффициент динамической вязкости несущей среды, $\delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{u}$ – флуктуации скоростей несущей среды и скоростей частиц.

При осреднении Воинов ввел три эмпирические безразмерные функции: коэффициент сопротивления $G(c)$, зависящий от концентрации, коэффициент напряжений $f(c, Fr)$, зависящий от концентрации и числа Фруда. Кроме того, к силе межфазного взаимодействия он добавил слагаемое, зависящее от градиента концентрации с коэффициентом, зависящим от концентрации и числа Фруда, получив замкнутую систему уравнений.

После линеаризации полученных уравнений для возмущения концентрации смеси $\delta c = -\delta \varepsilon$ получилось уравнение типа теплопроводности с коэффициентом теплопроводности k

$$\frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial t} - c \theta w \frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial z} = k \frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\partial z^2}, \quad \theta(Fr, c) = 1 - \frac{\varepsilon}{G} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}$$

$$k = \varepsilon R w \left(f(Fr, c) - \frac{Fr^2}{1 - \rho/\rho_s} \left(c^2 \theta(Fr, c)^2 + S^*(Fr, c) \right) \right)$$

Как известно в процессах, описываемых уравнение теплопроводности, при положительном коэффициенте теплопроводности $k > 0$ возмущения сглаживаются со временем, а при $k < 0$ уравнение некорректно. Приравнивание $k = 0$ в выражении для k , выписанном выше, определяет кривую устойчивости как зависимость $Fr = Fr(c)$ числа Фруда от концентрации (рис. 9). Эта кривая, изображена на рис. 9 сплошной линией.

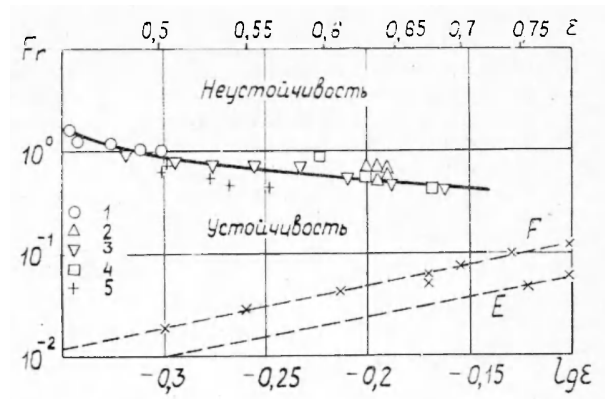


Рис. 9.

Полученная кривая устойчивости подтверждена большим числом экспериментов¹³.

Линии E и F описывают процесс устойчивого осаждения.

7. Решение задачи расчета осесимметричного течения вязкой жидкости. Течения вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса описываются пространственными уравнениями Стокса $\nabla p = \mu \Delta \mathbf{v}$, $\text{div} \mathbf{v} = 0$. Для осесимметричного течения с компонентами v_r, v_z в цилиндрических координатах r, z они имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Воинов выразил общее решение этих уравнений через две гармонические функции φ и ψ

$$v_r = 2z \frac{\partial \varphi}{\partial r} - r \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_z = r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad p = 2\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Для плоской задачи аналогичное представление дается известными формулами Гурса¹⁴.

О.В. Воинов в своей работе [13] свел задачу решения уравнений течения вязкой жидкости в приближении Стокса к задаче потенциальных течений, для которых он разработал метод граничных элементов (см. п. 3).

8. Изобретательская деятельность. Патенты. О.В. Воинов был соавтором ряда патентов: Сеточный узел вибросита, Способ бурения с кольматацией, Щелевая сетка, Вибросито.

Авторы благодарны сотруднику Архива МГУ Елене Валерьевне Лепениной за помощь в сборе материала.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

¹³Geldart D. Comment to "Application of mechanical stress theory to fluidization. Rietema K." — In: Proc. of the Int. Symp. on Fluidization, 1967. Eindhoven Amsterdam: Netherl. Univ. Press, 1967.

De Jong J. A. H., Nomden J. F. Homogeneous gas-solid fluidization. — Powder Technology, 1974, vol. 9, pt 2/3

Massimilla L., Donsi G., Zucchini C. The structure of bubble-free gas fluidized beds of fine fluid cracking catalyst particles. Chem. Eng. Sci., 1972, v. 27, p. 2005.

Полянский В.А. Экспериментальное исследование влияния свойств взвешивающей среды на поведение частиц псевдоожиженных слоев. Отчет НИИ механики МГУ № 2063.

¹⁴Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воинов О. В. Влияние вязкости на динамику возмущений пузыря в жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 3–5.
2. Воинов О. В. Инерциальное движение тела в идеальной жидкости из состояния покоя // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 4. – С. 214–219.
3. Воинов О. В. Структура течения жидкости при смачивании поверхности твердого тела // Доклады РАН. – 2008. – Т. 418, № 3. – С. 331–335.
4. Воинов О. В. Условия разрушения сферического газового пузыря в жидкости при нелинейных пульсациях // Доклады РАН. – 2008. – Т. 422, № 6. – С. 750–754.
5. Воинов О. В. Движение жидких пленок в газе // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 1. – С. 70–80.
6. Воинов О. В. Квазиустановившиеся течения в жидкой пленке в газе: сравнение двух методов описания волн // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48, № 3. – С. 103–111.
7. Воинов О. В. Движения жидких пленок в газе под действием капиллярных сил // Доклады РАН. – 2007. – Т. 414, № 3. – С. 325–329.
8. Воинов О. В. Симметрии медленных движений и равновесий сплошных сред // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 5. – С. 788–793.
9. Воинов О. В. Течения с квазиравновесными свободными границами в динамике смачивания твердых тел // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70, № 2. – С. 264–275.
10. *Voinov O. V.* Solution of the Reynolds equations for viscous-fluid flow in the clearance between a rotating ellipsoid and a surface // Fluid Dynamics. – 2005. – Vol. 40, no. 4. – P. 665.
11. Воинов О. В., Пухначев В. В. Модель термокапиллярного движения эмульсии // Доклады РАН. – 2005. – Т. 402, № 2. – С. 193–196.
12. Воинов О. В. Асимптотические закономерности гидродинамики смачивания // Доклады РАН. – 2005. – Т. 403, № 1. – С. 40–44.
13. Воинов О. И. Общие формы представления решений уравнений Стокса и метод расчета течений вязкой жидкости // Доклады РАН. – 2005. – Т. 405, № 5. – С. 625–629.
14. Воинов О. В. Решение уравнения Рейнольдса для течения вязкой жидкости в зазоре между вращающимся эллипсоидом и поверхностью // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2005. – № 4. – С. 186–188.

15. Воинов О. В. Обобщение задачи о течении вязкой жидкости в угле на течение с искривленными границами // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69, № 5. – С. 837–846.
16. Воинов О. В. Асимптотические свойства осесимметричного Стоксова течения вязкой жидкости с пересекающимися границами // Доклады РАН. – 2004. – Т. 394, № 4. – С. 473–475.
17. Dynamics, stability and solidification of emulsion under the action of thermocapillary forces and microacceleration / V. V. Pukhnachov [et al.] // Interfacial Fluid Dynamics and Transport Processes. – Berlin, 2003. – P. 325–354. – (Lecture Notes in Physics).
18. Воинов О. В. Течение кавитирующих пленок вязкой жидкости // Доклады РАН. – 2002. – Т. 387, № 6. – С. 767–771.
19. *Voinov O. V.* Motion stability of a periodic system of bubbles in a liquid // Journal of Fluid Mechanics. – 2001. – Vol. 438. – P. 247–275.
20. *Voinov O. V.* Wetting line dynamics in the process of drop spreading // Journal of Colloid and Interface Science. – 2000. – Vol. 226, no. 1. – P. 22–28.
21. *Voinov O. V.* Wetting film dynamics // Journal of Colloid and Interface Science. – 2000. – Vol. 226, no. 1. – P. 29–34.
22. *Voinov O. V.* Wetting: inverse dynamic problem and equations for microscopic parameters // Journal of Colloid and Interface Science. – 2000. – Vol. 226, no. 1. – P. 5–15.
23. Воинов О. В. Динамический краевой угол при смачивании поверхности жидкостью Ван-дер-Ваальса // Прикладная механика и техническая физика. – 2000. – Т. 41, № 4. – С. 101–105.
24. Воинов О. В. О динамике малого тела в неоднородном потоке // Доклады РАН. – 2000. – Т. 372, № 6. – С. 762–765.
25. Воинов О. В. Динамические краевые углы смачивания при растекании капли на поверхности твердого тела // Прикладная механика и техническая физика. – 1999. – Т. 40, № 1. – С. 101–107.
26. *Voinov O. V.* Meniscus and precursor film in steady-state wetting // Journal of Colloid and Interface Science. – 1998. – Vol. 201, no. 2. – P. 127–131.
27. *Voinov O. V.* Meniscus contact angle in unsteady viscous flow // Journal of Colloid and Interface Science. – 1998. – Vol. 201, no. 1. – P. 93–102.
28. *Voinov O. V.* Fine structure of meniscus of a wetting liquid // Journal of Colloid and Interface Science. – 1998. – Vol. 200, no. 2. – P. 197–202.
29. *Voinov O. V.* Slow wetting of a solid by a liquid film from a moving meniscus // Journal of Colloid and Interface Science. – 1997. – Vol. 188, no. 1. – P. 1–8.
30. *Voinov O. V.* Unsteady angle of contact during creeping motion of a wetting fluid // Physics. Doklady. – 1997. – Vol. 42, no. 12. – P. 700–704.
31. *Pukhnachov V. V., Voinov O. V.* Thermocapillary motion in an emulsion // Proceedings of the 1996 3rd Microgravity Fluid Physics Conference / ed. by Anon. – Cleveland, OH, USA, 1996. – P. 337–342. – (NASA Conference Publication).
32. *Voinov O. V.* Two-phase boundary dynamics near a moving contact line over a solid // International Journal of Multiphase Flow. – 1996. – Vol. 22, no. 6. – P. 1155–1166.
33. Воинов О. В. Уравнение энергии в гидродинамике смачивания // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1996. – № 6. – С. 111–117.

34. *Voinov O. V.* Motion of line of contact of three phases on a solid: thermodynamics and asymptotic theory // *International Journal of Multiphase Flow*. – 1995. – Vol. 21, no. 5. – P. 801–816.
35. Воинов О. В. Растекание капли вязкой жидкости по поверхности под действием капиллярных сил // *Прикладная математика и механика*. – 1995. – Т. 59, № 5. – С. 767–775.
36. Воинов О. В. Динамическая теория смачивания твердого тела вязкой жидкостью под действием сил Ван-дер-Ваальса // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1994. – Т. 35, № 6. – С. 69–85.
37. Воинов О. В. Динамика капиллярных волн на пузыре при нелинейных пульсациях в жидкости малой вязкости // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1994. – Т. 35, № 3. – С. 87–97.
38. Воинов О. В. Неустановившиеся течения смачивающих пленок вязкой жидкости по твердой поверхности // *Доклады РАН*. – 1994. – Т. 338, № 2. – С. 191–193.
39. Воинов О. В., Перепелкин В. В. Об устойчивости поверхности газового пузыря, пульсирующего в жидкости // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1989. – Т. 30, № 3. – С. 76–83.
40. Воинов О. В., Петров А. Г., Шрагер Г. Р. О модели течения внутри жидкой капли, обтекаемой газом // *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*. – 1989. – № 6. – С. 167–170.
41. Воинов О. В., Петров А. Г. О течениях с замкнутыми линиями тока и движении капель при больших числах Рейнольдса // *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*. – 1987. – № 5. – С. 61–70.
42. Воинов О. В., Петров А. Г. Устойчивость относительного движения фаз в течениях двухфазных сред // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1982. – Т. 23, № 1. – С. 83–90.
43. Воинов О. В., Пухначев В. В. Термокапиллярное движение в газожидкостной смеси // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1980. – Т. 21, № 5. – С. 38–45.
44. Воинов О. В. Расчет параметров скоростной струи, образующейся при захлопывании пузыря // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1979. – Т. 20, № 3. – С. 94–99.
45. Воинов О. В. Асимптотика свободной поверхности вязкой жидкости при ползущем движении и зависимость краевого угла смачивания от скорости // *Доклады АН СССР*. – 1978. – Т. 243, № 6. – С. 1422–1422.
46. Воинов О. В. Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1977. – Т. 18, № 2. – С. 92–99.
47. Воинов О. В., Петров А. Г. О тензоре напряжений в жидкости с дисперсными частицами // *Прикладная математика и механика*. – 1977. – Т. 41, № 2. – С. 368–369.
48. Воинов О. В. Гидродинамика смачивания // *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*. – 1976. – № 5. – С. 76–84.
49. Воинов О. В., Воинов В. В. О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струи // *Доклады АН СССР*. – 1976. – Т. 227, № 1. – С. 63–66.

50. Воинов О. В., Петров А. Г. Движение пузырей в жидкости // Итоги науки и техники. Серия: Механика жидкости и газа. Т. 10. – Москва : ВИНТИ, 1976. – С. 86–147.
51. Воинов В. В., Воинов О. В. О движении и заполнении полостей в безграничной жидкости и около плоскости // Прикладная механика и техническая физика. – 1975. – Т. 16, № 1. – С. 89–95.
52. Воинов О. В., Петров А. Г. Об уравнениях движения жидкости с пузырьками // Прикладная математика и механика. – 1975. – Т. 39, № 5. – С. 845–856.
53. Воинов О. В., Воинов В. В. Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 221, № 3. – С. 559–562.
54. Воинов О. В., Гуревич М. И. О силах, действующих на тонкое осесимметричное тело, ориентированное параллельно дну // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1974. – № 2. – С. 169–172.
55. Воинов О. В. К теории утоньшения свободных пленок вязкой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 1974. – Т. 15, № 3. – С. 67–78.
56. Воинов В. В., Воинов О. В., Петров А. Г. Метод расчета потенциального обтекания тела вращения потоком несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1974. – Т. 14, № 3. – С. 797–802.
57. Воинов О. В. Уравнения движения свободных жидких пленок и модель их плоскопараллельного утончения // Доклады АН СССР. – 1974. – Т. 216, № 2. – С. 285–288.
58. Воинов О. В. О силе, действующей на сферу в неоднородном потоке идеальной несжимаемой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 1973. – Т. 14. – С. 182–184.
59. Воинов В. В., Воинов О. В., Петров А. Г. Гидродинамическое взаимодействие тел в идеальной несжимаемой жидкости и их движение в неоднородных потоках // Прикладная математика и механика. – 1973. – Т. 37, № 4. – С. 680–689.
60. Воинов О. В., Петров А. Г. Функция Лагранжа газового пузырька в неоднородном потоке // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 210. – С. 1036–1039.
61. Воинов О. В., Петров А. Г. О перемещении деформирующихся тел в идеальной жидкости из состояния покоя // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 212, № 5. – С. 1086–1088.
62. Воинов О. В., Головин А. М., Петров А. Г. Перенос энергии от испаряющейся капли в паровой среде // Прикладная механика и техническая физика. – 1972. – Т. 13. – С. 74–78.
63. *Voinov O. V., Petrov A. G.* Motion of a variable-volume sphere in an ideal fluid near a plane surface // Fluid Dynamics. – 1971. – Vol. 6, no. 5. – P. 808.
64. Воинов О. В. Волновые движения в слое вязкой жидкости в присутствии поверхностно-активных веществ // Прикладная механика и техническая физика. – 1971. – Т. 12, № 3. – С. 81–89.
65. Воинов О. В. Силы вязкого трения при движении двух пузырей в жидкости малой вязкости // Теоретические основы химической технологии. – 1971. – Т. 5, № 1. – С. 168.
66. Воинов О. В., Петров А. Г. Движение сферы переменного объема в идеальной жидкости около плоской поверхности // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1971. – № 5. – С. 94–103.

67. Воинов О. В., Головин А. М. Уравнения Лагранжа для системы пузырей изменяющихся радиусов в жидкости малой вязкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1970. – № 3. – С. 117–123.
68. *Voinov O. V., Golovin A. M.* Lagrange equations for a system of bubbles of varying radii in a liquid of small viscosity // *Fluid Dynamics*. – 1970. – Vol. 5. – P. 458.
69. Воинов О. В., Головин А. М., Петров А. Г. Движение эллипсоидального пузыря в жидкости малой вязкости // Прикладная механика и техническая физика. – 1970. – Т. 11, № 3. – С. 76–81.
70. Воинов О. В. Релаксация жидкого слоя под действием капиллярных сил // Прикладная механика и техническая физика. – 1970. – Т. 11, № 1. – С. 73–77.
71. Воинов О. В. О движении двух сфер в идеальной жидкости // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 4. – С. 659–667.
72. Воинов О. В. Движение двух сфер переменных радиусов в идеальной жидкости // Тезисы докладов. Научная конференция Института механики. – 1970. – С. 10–12.
73. Воинов О. В. Движение идеальной жидкости около двух сфер и с радиальными скоростями на поверхности // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 1969. – № 5. – С. 83–88.