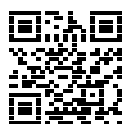


ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ТЕРМОУПРУГОСТИ И ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия
Аннотация. Излагается приближенный двусторонне асимптотический метод решения парных интегральных уравнений, к которым сводятся статические контактные задачи теории упругости, термоупругости и электроупругости для неоднородных (функционально-градиентных) по толщине покрытий, лежащих как на деформируемом, так и недеформируемом основании [1-10]. Трансформанты ядер парных интегральных уравнений контактных задач в общем случае строятся численно. На основании установленных аналитических свойств трансформант ядер строятся их высокоточные аппроксимации аналитическими выражениями специального вида. Для этих аппроксимаций ядер парных интегральных уравнений построены в явном виде замкнутые аналитические решения. Метод позволяет получить приближенные аналитические решения задач с высокой точностью для произвольных законов неоднородности. Анализируется использование для инженерных приложений упрощенных выражений характеристик контакта (сила, жесткость, характерный размер области контакта), найденных в явном аналитическом виде с использованием простейшей однопараметрической аппроксимации трансформанты ядра. Проиллюстрировано хорошее совпадение теоретических и экспериментальных данных, полученных в результате наноиндентирования тонких покрытий.

Ключевые слова: контактные задачи, двусторонне асимптотический метод, термоупругость, электроупругость, парные интегральные уравнения приближенные аналитические решения. Айзикович Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией функционально-градиентных и композиционных материалов; e-mail: saizikovich@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-2756-5752>; AuthorID: 3105



для цитирования: Айзикович С. М. Приближенные аналитические решения неклассических смешанных задач теории упругости, термоупругости и электроупругости для неоднородных покрытий высокой точности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 229–232. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.016. EDN: SOPBKK

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

S. M. Aizikovich

APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF NONCLASSICAL MIXED
PROBLEMS OF ELASTICITY, THERMOELASTICITY, AND
ELECTROELASTICITY FOR INHOMOGENEOUS COATINGS WITH HIGH
ACCURACY

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

Abstract. This paper presents an approximate, bilaterally asymptotic method for solving dual integral equations to which static contact problems of elasticity, thermoelasticity, and electroelasticity theory are reduced for coatings that are inhomogeneous (functionally graded) in thickness, lying on deformable or non-deformable foundations [1-10]. Transformers of the kernels of dual integral equations for contact problems are generally constructed numerically. Based on the established analytical properties of the kernel transforms, high-precision approximations are constructed using analytical expressions of a special type. For these approximations of the kernels of dual integral equations, closed-form analytical solutions are constructed explicitly. This method enables one to obtain approximate analytical solutions to problems with high accuracy for arbitrary inhomogeneity laws. The use of simplified expressions for contact characteristics (force, stiffness, and characteristic size of the contact region) found in explicit analytical form using a simple one-parameter approximation of the kernel transform is analyzed for engineering applications. Good agreement between theoretical and experimental data obtained through nanoindentation of thin coatings is illustrated.

Keywords: contact problems, bilateral asymptotic method, thermoelasticity, electroelasticity, paired integral equations, approximate analytical solutions.

Sergei M. Aizikovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of Functional Gradient and Composite Materials; e-mail: saizikovich@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-2756-5752>; AuthorID: 3105



to cite this article: Aizikovich S. M. Approximate analytical solutions of nonclassical mixed problems of elasticity, thermoelasticity, and electroelasticity for inhomogeneous coatings with high accuracy // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 229–232. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.016

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Автор единолично выполнил исследование и подготовил рукопись, внёс определяющий вклад в содержание статьи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The author conducted the research and prepared the manuscript alone, making a significant contribution to the content of the article.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Indentation of a Piezoelectric FGM-Coated Half-Space by a Conical Conductive Punch: Approximated Analytical Solution / A. S. Vasiliev [et al.] // International Journal of Engineering Science. – 2024. – Vol. 205. – P. 104161. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2024.104161.
2. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Hot Indentation of a FGM-Coated Thermoelastic Half-Space by a Conical Punch: Approximated Analytical Solution of the Contact Problem // Composite Structures. – 2023. – Vol. 309. – P. 116612. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.116612.
3. Simplified Analytical Solution of the Contact Problem on Indentation of a Coated Half-Space by a Conical Punch / A. S. Vasiliev [et al.] // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, no. 6. – P. 983. – DOI: 10.3390/math8060983.
4. Упрощенное аналитическое решение контактной задачи о вдавливании конического штампа в полупространство с покрытием / А. С. Васильев [и др.] // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2020. – 2(206). – С. 29–37. – DOI: 10.18522/1026-2237-2020-2-29-37.
5. Axisymmetric Indentation of an Electroelastic Piezoelectric Half-Space with Functionally Graded Piezoelectric Coating by a Circular Punch / S. S. Volkov [et al.] // Acta Mechanica. – 2019. – Vol. 230, no. 4. – P. 1289–1302. – DOI: 10.1007/s00707-017-2026-x.
6. Васильев А. С., Волков С. С., Айзикович С. М. Приближенное аналитическое решение задачи о вдавливании проводящего штампа в электроупругое полупространство с неоднородным покрытием // Доклады Академии Наук. Механика. – 2018. – Т. 478, № 1. – С. 34–39.
7. Indentation of a Hard Transversely Isotropic Functionally Graded Coating by a Conical Indenter / A. S. Vasiliev [et al.] // International Journal of Engineering Science. – 2017. – Vol. 112. – P. 63–75. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2016.12.002.

Received: 10.03.26;

accepted: 19.05.26;

published: 01.07.26.

8. Torsion of a Punch Attached to Transversely-Isotropic Half-Space with Functionally Graded Coating / A. S. Vasiliev [et al.] // International Journal of Engineering Science. – 2012. – Vol. 61. – P. 24–35. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.06.006.
9. Aizikovich S. M., Vasiliev A. S., Seleznev N. M. Inverse Analysis for Evaluation of the Shear Modulus of Inhomogeneous Media by Torsion Experiments // International Journal of Engineering Science. – 2010. – Vol. 48. – P. 936–942. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2010.05.013.
10. Айзикович С. М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений // Прикладная математика и механика. – 1990. – Т. 54, № 5. – С. 872–877.

REFERENCES

1. Indentation of a Piezoelectric FGM-Coated Half-Space by a Conical Conductive Punch: Approximated Analytical Solution / A. S. Vasiliev [et al.] // International Journal of Engineering Science. – 2024. – Vol. 205. – P. 104161. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2024.104161.
2. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Hot Indentation of a FGM-Coated Thermoelastic Half-Space by a Conical Punch: Approximated Analytical Solution of the Contact Problem // Composite Structures. – 2023. – Vol. 309. – P. 116612. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.116612.
3. Simplified Analytical Solution of the Contact Problem on Indentation of a Coated Half-Space by a Conical Punch / A. S. Vasiliev [et al.] // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, no. 6. – P. 983. – DOI: 10.3390/math8060983.
4. A Simplified Analytical Solution of the Contact Problem of Indenting a Conical Stamp into a Coated Half-Space / A. S. Vasiliev [et al.] // News of Universities. North Caucasus Region. Natural Sciences. – 2020. – 2(206). – P. 29–37. – DOI: 10.18522/1026-2237-2020-2-29-37.
5. Axisymmetric Indentation of an Electroelastic Piezoelectric Half-Space with Functionally Graded Piezoelectric Coating by a Circular Punch / S. S. Volkov [et al.] // Acta Mechanica. – 2019. – Vol. 230, no. 4. – P. 1289–1302. – DOI: 10.1007/s00707-017-2026-x.
6. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Approximate Analytical Solution of the Problem of Indenting a Conductive Stamp into an Electroelastic Half-Space with a Non-Uniform Coating // Reports of the Academy of Sciences. Mechanics. – 2018. – Vol. 478, no. 1. – P. 34–39.
7. Indentation of a Hard Transversely Isotropic Functionally Graded Coating by a Conical Indenter / A. S. Vasiliev [et al.] // International Journal of Engineering Science. – 2017. – Vol. 112. – P. 63–75. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2016.12.002.
8. Torsion of a Punch Attached to Transversely-Isotropic Half-Space with Functionally Graded Coating / A. S. Vasiliev [et al.] // International Journal of Engineering Science. – 2012. – Vol. 61. – P. 24–35. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.06.006.
9. Aizikovich S. M., Vasiliev A. S., Seleznev N. M. Inverse Analysis for Evaluation of the Shear Modulus of Inhomogeneous Media by Torsion Experiments // International Journal of Engineering Science. – 2010. – Vol. 48. – P. 936–942. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2010.05.013.
10. Aizikovich S. M. An Asymptotic Solution of a Class of Coupled Equations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1990. – Vol. 54, no. 5. – P. 719–724. – DOI: 10.1016/0021-8928(90)90125-T.