

## УЧЕТ КВАДРАТИЧНОГО И КУБИЧНОГО ИНВАРИАНТОВ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Российский университет транспорта РУТ-МИИТ, Москва, Россия

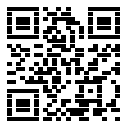
Аннотация. Динамическое уравнение в перемещениях теории упругости не учитывает явно деформации сдвига. Их косвенный учет мог бы производиться через выражение для коэффициента объемного расширения, но его упрощают до оператора дивергенции. Поэтому для конструкций и сооружений, работающих в основном на сдвиг, решение динамического уравнения в перемещениях не дает правильного результата. Л. И. Седов дал полное выражение для коэффициента объемного расширения  $\theta$  для задач теории упругости, содержащее линейный инвариант — оператор дивергенции, а также квадратичный  $I_2$  и кубичный  $I_3$  инварианты тензора деформации, которое учитывает деформации сдвига. Он отметил, что учет только слагаемого с оператором дивергенции при расчете объемного коэффициента расширения следует рассматривать приближенным вычислением. Л. И. Седов опирался на уравнение неразрывности

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z + I_2 + I_3 = 0,$$

выведенное Эйлером в 1752 г. Автор доклада повторил вывод В.И. Смирнова динамического уравнения в перемещениях с сохранением всех трех инвариантов. Оно получило вид неоднородного волнового уравнения. В неоднородную источниковую часть вошли квадратичный и кубичный инварианты. Чем больше их величины, тем большую амплитуду раскочки будут давать решения этого уравнения. Уничтожение квадратичного и кубичного инвариантов при выводе динамического уравнения занижает интенсивность возможных автоколебаний, способных привести к разрушению. В особенности учет квадратичного и кубичного инвариантов важен в сейсмологии в связи с обеспечением безопасности строений и в других чрезвычайных ситуациях.

Ключевые слова: деформации сдвига, уравнение неразрывности, волновое уравнение, генерация колебаний.

Овсянников Владислав Михайлович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры водных путей, портов и портового оборудования; e-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-6868-6446>; AuthorID: 7894



для цитирования: Овсянников В. М. Учет квадратичного и кубичного инвариантов тензора деформации в динамическом уравнении в перемещениях теории упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 239–242. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.018. EDN: LFAUIS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

V. M. Ovsyannikov

## TAKING INTO ACCOUNT THE QUADRATIC AND CUBIC INVARIANTS OF THE STRAIN TENSOR IN THE DYNAMIC EQUATION IN DISPLACEMENTS OF THE THEORY OF ELASTICITY

Russian University of Transport RUT (MIIT), Moscow, Russia

**Abstract.** The aim of the study is to take into account shear deformations in the continuity equation. The continuity equation for hydrodynamics and elasticity theory was derived by Euler in 1752, taking into account the tensile and shear deformations of the control figure. Euler reported his results to the Royal Prussian Academy of Sciences. To simplify the formulas for the initial period of the formation of continuum mechanics, Euler eliminated the terms containing shear deformations. They were included in the second and third invariants of the strain rate tensor of Hydrodynamics and the strain tensor of Elasticity Theory. In the continuity equation, only the first invariant remains, which contains the divergence operator of the velocity vector or displacement vector. Only tensile and compressive strains were taken into account.

Now there is a need for accurate calculations of problems in Hydrodynamics and Elasticity Theory. L. I. Sedov in his textbook "Continuum Mechanics" pointed out the need to take into account the second and third invariants of the strain tensor in the exact expression for the coefficient of volumetric expansion of elasticity theory. The textbook "Course of Higher Mathematics" by V.I. Smirnov contains the derivation of the equation of dynamics in displacements for the Theory of Elasticity. It has the form of an inhomogeneous wave equation. V.I. Smirnov did not take into account the second and third invariants of the strain tensor. Taking into account the second and third invariants of the strain tensor made it possible to obtain a non-uniform wave equation of dynamics in displacements, in which the non-uniform part increased and increased the generation of vibrations of the building. Carrying out calculations without taking into account the second and third invariants is dangerous. A large correction when taking into account the second and third invariants occurs for buildings that undergo large shear deformations. These are domes and shells that have thin walls.

Modern lightweight building materials make it possible to construct gigantic buildings with thin walls. Their calculation must take into account the shear deformations, which are reflected in the second and third invariants of the deformation tensor. As a result of the study, the physical meaning of the terms of the continuity equation, which contain the second and third invariants, was understood. The second and third invariants are the sources of wave generation in the wave equation.

**Keywords:** shear deformations, continuity equation, wave equation, oscillation generation.

Vladislav M. Ovsyannikov, Doctor of Technical Sciences, Professor; professor at the Russian University of Transport RUT (MIIT); e-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-6868-6446>; AuthorID: 7894



to cite this article: Ovsyannikov V. M. Taking into account the quadratic and cubic invariants of the strain tensor in the dynamic equation in displacements of the theory of elasticity // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 239–242. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.018

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. В. М. Овсянников написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, обзор литературы по теме статьи, проведение расчетов, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

### ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. V. M. Ovsyannikov writing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript, reviewing the literature on the topic of the article, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Euler L. Principia motus fluidorum. Pars prior* // *Novi Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae*. – 1761. – Vol. 6. – P. 271–311. – Opera omnia, Ser. II, Vol. 13, pp. 1–369.
2. *Euler L. Commentationes Mechanicae ad Theoriam Corporum Pertinentes. Volumen Prius* / ed. by C. A. Truesdell. – Lausannae, 1954.
3. *Euler L. Principia motus fluidorum*. – Moscow : Sputnik+, 2018. – 94 p. – *Perevod s latyni nachal'nykh razdelov doklada 1752 g. v Berlinskoi AN Ivanovoi, E. V., Ovsyannikova, V. M.*
4. Овсянников В. М. Сопоставление дополнительных слагаемых второго порядка малости для конечно-разностных уравнений Эйлера и малых добавок в регуляризованных уравнениях гидродинамики // *ЖВМиМФ*. – 2017. – Т. 57, № 5. – С. 876–880.
5. Овсянников В. М. Уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости по времени течения // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.* – 2020. – Т. 182. – С. 95–100. – DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-95-100.

Received: 10.03.26;

accepted: 19.05.26;

published: 01.07.26.

6. Овсянников В. М. Использование геометрических свойств трех инвариантов в волновых задачах гидродинамики и электродинамики // Известия РАН. Серия физическая. – 2024. – Т. 88, № 1. – С. 138–147.
7. Овсянников В. М. Использование геометрических свойств трех инвариантов в волновом уравнении для напряженности электрического поля // Известия РАН. Серия физическая. – 2025. – Т. 89, № 2. – С. 164–171.
8. Овсянников В. М. Учет высших инвариантов тензора деформаций в задачах теории упругости // Вестник гражданских инженеров. – 2025. – 3(110). – С. 68–73.

## REFERENCES

1. *Euler L.* Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae. – 1761. – Vol. 6. – P. 271–311. – Opera omnia, Ser. II, Vol. 13, pp. 1–369.
2. *Euler L.* Commentationes Mechanicae ad Theoriam Corporum Pertinentes. Volumen Prius / ed. by C. A. Truesdell. – Lausannae, 1954.
3. *Euler L.* Principia Motus Fluidorum. – Moscow : Sputnik+, 2018. – 94 p. – Russian translation of the initial sections of the 1752 report to the Berlin Academy of Sciences by Ivanova, E. V. and Ovsyannikov, V. M.
4. *Ovsyannikov V. M.* Comparison of Additional Second-Order Terms in Finite-Difference Euler Equations and Regularized Fluid Dynamics Equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2017. – Vol. 57, no. 5. – P. 876–880. – DOI: 10.1134/S0965542517050098.
5. *Ovsyannikov V. M.* Euler Continuity Equation with High-Order Term in Time // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – Vol. 277, no. 5. – P. 798–803. – DOI: 10.1007/s10958-023-06888-y.
6. *Ovsyannikov V. M.* Using the Geometric Properties of Three Invariants in Wave Problems of Hydrodynamics and Electrodynamics // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2024. – Vol. 88, no. 1. – P. 119–126.
7. *Ovsyannikov V. M.* Using the Geometric Properties of Three Invariants in the Wave Equation for the Intensity of an Electric Field // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2025. – Vol. 89, no. 2. – P. 305–311.
8. *Ovsyannikov V. M.* Taking into Account Higher Invariants of the Strain Tensor in Elasticity Problems // Civil Engineers' Bulletin. – 2025. – 3(110). – P. 68–73. – (in Russian).