

Модестов К. А.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕДАХ, СВОЙСТВА КОТОРЫХ МОДЕЛИРУЮТСЯ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

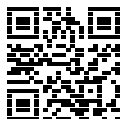
Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия
Национальный исследовательский Московский государственный строительный
университет, Москва, Россия

Аннотация. В работе выполнено моделирование и проведён анализ распространения волн в средах, наследственно-упругие свойства которых описываются с помощью моделей Максвелла, Кельвина-Фойгта и стандартного линейного твёрдого тела с производными дробного порядка. Задачами исследования являются: математическое моделирование эволюции коэффициента Пуассона; анализ распространения установившихся гармонических волн в трёхмерных средах; анализ распространения установившихся гармонических волн в одномерных средах; анализ распространения нестационарных волн напряжений в одномерных средах; моделирование распространения нестационарных волн напряжений с использованием лучевых разложений. Разработана методика выражения временных зависимостей коэффициента Пуассона для процессов релаксации и ползучести через функции Гельфанда-Шилова и Миттаг-Леффлёра. С использованием данной методики получены коэффициенты Пуассона для 16 моделей, в которых 4 модуля поочередно задаются моделями Скотт-Блэра, Максвелла, Кельвина-Фойгта и стандартного линейного твёрдого тела при отсутствии релаксации объёмного модуля [1]. Получены точные аналитические выражения для частотных зависимостей скорости, коэффициента затухания и логарифмического декремента затухания установившихся гармонических волн в трёхмерных [2,3] и одномерных [4] вязкоупругих средах, описываемых обобщёнными дробными моделями Максвелла, Кельвина-Фойгта и стандартного линейного твёрдого тела, моделирующих различные модули при отсутствии релаксации объёмного модуля, построены графики данных зависимостей, найдены асимптотические значения вышеперечисленных волновых характеристик в пределе бесконечно малых и бесконечно больших частот. Исследовано распространение волн напряжений в наследственно упругих стержнях для случая, когда оператор модуля Юнга описывается моделью стандартного линейного твёрдого тела с дробными производными без учета объёмной релаксации [5]. Волны напряжений возбуждаются путем приложения к краю полубесконечного стержня постоянной нагрузки с помощью функции Хевисайда или импульсной нагрузки с помощью дельта-функции Дирака. Решение ищется с помощью преобразования Лапласа с последующим численным анализом. Для частных случаев получены аналитические решения, а в общем случае задача была решена численно. Для различных моментов времени и значений параметров дробности построены графики зависимости напряжений от координаты. Разработано обобщение лучевого разложения волнового поля в окрестности волнового фронта в стержнях

в асимптотический знакопеременный ряд по степеням сопутствующего времени с коэффициентами, зависящими от пространственной координаты, на случай слабо-сингулярных ядер ползучести. С использованием данного метода получены обобщённые лучевые разложения для моделей Максвелла, стандартного линейного твёрдого тела и для общего случая чисто волновых моделей с дробной производной порядка $1/2$ для приложенных к левому концу стержня постоянной и импульсной нагрузок. Показан механизм получения обобщённого лучевого ряда для случая произвольной нагрузки. Проведена численная валидация полученных результатов.

Ключевые слова: операторы дробного порядка, наследственная механика, дисперсия и затухание волн, нестационарные волны напряжений, прифронтная асимптотика.

Модестов Константин Анатольевич, старший преподаватель кафедры общей и прикладной физики; e-mail: modestovk@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4596-2652>; AuthorID: 635355



для цитирования: Модестов К. А. Гармонические и нестационарные волны в вязкоупругих средах, свойства которых моделируются операторами дробного порядка // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 243–247. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.020. EDN: JIZA AK

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

K. A. Modestov

HARMONIC AND TRANSIENT WAVES IN VISCOELASTIC MEDIA, THE PROPERTIES OF WHICH ARE DESCRIBED BY FRACTIONAL ORDER OPERATORS

I. Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

I.N. National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. In this work, modeling and analysis of wave propagation are carried out in media whose hereditary-elastic properties are described using the Maxwell, Kelvin–Voigt, and standard linear solid models with fractional-order derivatives. The objectives of the study are: mathematical modeling of the evolution of Poisson’s ratio; analysis of the steady-state harmonic wave propagation in three-dimensional media; analysis of the steady-state harmonic wave propagation in one-dimensional media; analysis of the transient stress wave propagation in one-dimensional media; modeling the propagation of transient stress waves using ray expansions. A methodology has been developed to express the time-dependence of the Poisson’s ratio for relaxation and creep processes using the Gelfand-Shilov and Mittag-Leffler functions. Using this methodology, the Poisson ratio has been obtained for 16 models, in which 4 moduli are successively described by Scott-Blair, Maxwell, Kelvin–Voigt, and standard linear solid models, assuming no relaxation of the bulk modulus [1]. Exact analytical expressions have been derived for the frequency-dependent behavior of velocity, attenuation coefficient, and logarithmic decrement of attenuation of steady-state harmonic waves in three-dimensional [2, 3] and one-dimensional [4] viscoelastic media described by the generalized fractional Maxwell, Kelvin-Voigt and standard linear solid models that represent various moduli under the assumption of no bulk modulus relaxation. Graphs of these dependencies have been plotted, and asymptotic values of the aforementioned wave characteristics have been found in the limits of infinitely small and infinitely large frequencies. The propagation of stress waves in hereditarily elastic rods has been studied for the case where the Young’s modulus operator is described by the standard linear solid model with fractional derivatives, neglecting bulk relaxation [5]. Stress waves are excited by applying a constant load to the end of a semi-infinite rod via the Heaviside function or an impulsive load using the Dirac delta function. The solution is sought via the Laplace transform, followed by numerical analysis. Analytical solutions have been found for particular cases, while the general case has been solved numerically. Graphs of stress versus coordinate have been plotted for various time instants and fractional parameter values. A generalization of the ray expansion of the wave field in the vicinity of the wavefront in rods has been developed into an asymptotic alternating series in powers of the associated time, with coefficients depending on the spatial coordinate, extended to the case of weakly singular creep kernels. Using this method, generalized ray expansions have been obtained for the Maxwell model, the standard linear solid model, and for the general case of purely wave models with a fractional derivative of order $1/2$, under constant and impulsive loads applied to the left end of the rod.

The mechanism for obtaining a generalized ray series for an arbitrary load has been demonstrated. Numerical validation of the results obtained has been carried out.

Keywords: fractional-order operators, hereditary mechanics, dispersion and attenuation of waves, nonstationary stress waves, near-front asymptotics.

Konstantin A. Modestov, Senior Lecturer at the Department of General and Applied Physics; e-mail: modestovk@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4596-2652>; AuthorID: 635355



to cite this article: Modestov K. A. Harmonic and transient waves in viscoelastic media, the properties of which are described by fractional order operators // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 243–247. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. К. А. Модестов – написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, обзор литературы по теме статьи, проведение численных экспериментов, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Данные исследования поддержаны Российским научным фондом, проект № 25-11-00140.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. K. A. Modestov – writing the manuscript text, approval of the final version of the manuscript, review of the literature on the topic of the article, conducting numerical experiments, editing the manuscript text.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This research was supported by the Russian Science Foundation, project No. 25-11-00140.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shitikova M. V., Modestov K. A.* Mathematical modelling of viscoelastic media without bulk relaxation via fractional calculus approach // *Mathematics*. – 2025. – Vol. 13, no. 3. – P. 350. – DOI: 10.3390/math13030350.
2. Модестов К. А., Шитикова М. В. Распространение гармонических волн в вязкоупругих средах, описываемых моделями с дробными производными // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. – 2025. – Т. 25, № 2. – С. 214–230. – DOI: 10.18500/1816-9791-2025-25-2-214-230. – EDN: PVASPW.
3. *Shitikova M. V., Modestov K. A.* Analysis of harmonic wave propagation in fractional derivative viscoelastic media based on time-dependent modulus of the P-wave // *Mechanics of Solids*. – 2024. – Vol. 59, no. 8. – P. 3949–3967. – DOI: 10.1134/S0025654424607079.

Received: 10.02.26;

accepted: 25.05.26;

published: 01.07.26.

4. *Shitikova M. V., Modestov K. A.* Analysis of harmonic wave propagation in viscoelastic rods via fractional derivative models // *Mechanics of Solids*. – 2026. – Vol. 61, no. 1. – PaperID 62. – DOI: 10.1134/S0025654426600261.
5. Шитикова М. В., Модестов К. А. Анализ распространения волн напряжений в наследственно упругих стержнях на основе модели стандартного линейного тела с дробными производными // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2026. – Т. 30, № 2.

REFERENCES

1. *Shitikova M. V., Modestov K. A.* Mathematical Modelling of Viscoelastic Media without Bulk Relaxation via Fractional Calculus Approach // *Mathematics*. – 2025. – Vol. 13, no. 3. – P. 350. – DOI: 10.3390/math13030350.
2. *Modestov K. A., Shitikova M. V.* Harmonic Wave Propagation in Viscoelastic Media Modelled via Fractional Derivative Models // *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. – 2025. – Vol. 25, no. 2. – P. 214–230. – DOI: 10.18500/1816-9791-2025-25-2-214-230. – (in Russian).
3. *Shitikova M. V., Modestov K. A.* Analysis of Harmonic Wave Propagation in Fractional Derivative Viscoelastic Media Based on Time-Dependent Modulus of the P-Wave // *Mechanics of Solids*. – 2024. – Vol. 59, no. 8. – P. 3949–3967. – DOI: 10.1134/S0025654424607079.
4. *Shitikova M. V., Modestov K. A.* Analysis of Harmonic Wave Propagation in Viscoelastic Rods via Fractional Derivative Models // *Mechanics of Solids*. – 2026. – Vol. 61, no. 1. – PaperID 62. – DOI: 10.1134/S0025654426600261.
5. *Shitikova M. V., Modestov K. A.* Analysis of Stress Wave Propagation in Hereditarily Elastic Rods via the Fractional Derivative Standard Linear Solid Model // *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskie Nauki*. – 2026. – Vol. 30, no. 2. – (in Russian).