

## СИСТЕМА ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ НЕРАВЕНСТВ В МЕХАНИКЕ ЛИНЕЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ГУКА

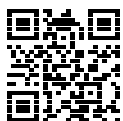
*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**Аннотация.** Статья посвящена исследованию вопросов устойчивости положений равновесия линейных анизотропных тел Гука. Энергия деформации таких тел является квадратичной формой от симметричного тензора деформаций. Энергетическая форма линейного анизотропного тела, в силу свойств симметрии определяющего тензора четвертого ранга, характеризуется 21-м изоэнтропийным механическим модулем. Для удобства оперирования с указанной квадратичной формой вводятся формальные переменные. Получены соотношения, связывающие компоненты определяющего тензора анизотропного тела Гука с элементами матрицы квадратичной формы. Условия устойчивого равновесия выражаются через условия положительной определенности квадратичной формы. Наиболее просто такие условия могут быть получены с помощью критерия Сильвестра, что подразумевает вычисление угловых миноров матрицы квадратичной формы. Трудности вычисления миноров пятого и шестого порядков преодолеваются с помощью системы символьных вычислений Wolfram Mathematica. Получены 6 односторонних ограничений (в форме неравенств), накладываемых на упругие модули, гарантирующих устойчивость равновесия линейного анизотропного тела Гука. До настоящего времени приведенные в статье результаты не могли быть найдены. Именно оперирование с данными с помощью систем символьных вычислений позволило, в конце концов, достигнуть прогресса в этом вопросе.

**Ключевые слова:** энергия деформации, внутренняя энергия, тело Гука, анизотропия, упругость, устойчивость равновесия, теория упругости Гука–Навье, критерий Сильвестра

**Мурашкин Евгений Валерьевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики новых материалов и технологий; e-mail: murashkin@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

**Радаев Юрий Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории механики новых материалов и технологий; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



**для цитирования:** Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Система определяющих неравенств в механике линейных анизотропных тел Гука // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 32–49. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.013. EDN: CCKYIG

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

## HOOKE'S SYSTEM OF CONSTITUTIVE INEQUALITIES IN THE MECHANICS OF LINEAR ANISOTROPIC BODIES

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** This paper investigates the stability of the equilibrium positions of linear anisotropic Hookean solids. The strain energy of such solids is a quadratic form of the symmetric strain tensor. Due to the symmetry properties of the fourth-rank indicative tensor, the energy form of a linear anisotropic solid is characterized by the 21st isentropic mechanical modulus. Formal variables are introduced to facilitate manipulation of this quadratic form. Relations are derived linking the components of the indicative tensor of an anisotropic Hookean solid with the elements of the quadratic matrix. Conditions for stable equilibrium are expressed in terms of positive definiteness conditions for the quadratic form. These conditions can be most easily obtained using Sylvester's criterion, which involves calculating the angular minors of the quadratic matrix. Difficulties in calculating fifth- and sixth-order minors are overcome using the Wolfram Mathematica symbolic computing system. Six one-sided constraints (in the form of inequalities) imposed on the elastic moduli guaranteeing the equilibrium stability of a linear anisotropic Hookean solid were obtained. Until now, the results presented in the article had been unattainable. It was precisely the manipulation of data using symbolic computing systems that ultimately made progress in this area possible.

**Keywords:** deformation energy, internal energy, Hooke's body, anisotropy, elasticity, equilibrium stability, Hooke-Navier theory of elasticity, Sylvester criterion

**Evgenii V. Murashkin**, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; **e-mail:** evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

**Yuri N. Radayev**, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; **e-mail:** radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



**to cite this article:** Murashkin E. V., Radayev Y. N. Hooke's system of constitutive inequalities in the mechanics of linear anisotropic bodies // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 32–49. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.013

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**1. Введение.** Построение энергетических форм, как правило, предшествует математическому моделированию механического поведения деформируемых сред [Kessel1964, 1–13]. Указанные энергетические формы используются также при формулировке вариационных принципов и выводе дифференциальных уравнений равновесия и движения. Кроме этого, исследование положительной определенности самой энергетической формы позволяет установить условия устойчивости положений равновесия деформируемого тела. Такие условия могут быть получены различными способами, известными из алгебры и теории матриц. Например, ранее аналогичные условия были получены для изотропного и гемитропного микрополярных упругих континуумов [14–16].

В настоящем исследовании формулируются критерии устойчивости положений равновесия для линейных анизотропных тел Гука.<sup>1</sup> Условия устойчивого равновесия выражаются условиями положительной определенности квадратичной энергетической формы, т.е. условиям положительной определенности ее матрицы. В связи с этим положительная определенность матрицы квадратичной энергетической формы гарантирует эллиптичность статических уравнений и гиперболичность дифференциальных уравнений движения анизотропного упругого тела. Существует много подходов к выяснению рассматриваемых вопросов [14–16], например, с помощью вычисления собственных значений [17–19]. Наиболее просто указанные условия могут быть получены с помощью критерия Сильвестра, что подразумевает вычисление «угловых» миноров матрицы квадратичной формы. Трудности вычисления пятого и шестого миноров успешно преодолеваются с помощью системы символьных вычислений Wolfram Mathematica 14.1. Получены 6 односторонних ограничений (в форме неравенств), накладываемых на упругие модули, гарантирующих устойчивость равновесия линейного анизотропного тела Гука. До настоящего времени приведенные в статье результаты не могли быть найдены ввиду огромного количества сравнительно элементарных алгебраических действий. Именно оперирование данными с помощью систем символьных вычислений позволило в конце концов достигнуть прогресса в этой проблеме. Полученный в работе результат является существенным вкладом в классическую линейную теорию упругости Гука–Навье.

Следует подчеркнуть, что настоящее исследование основано на понятиях, терминологии, обозначениях, методах и результатах, представленных в предыдущих работах авторов [11, 14–16, 20–23].

**2. Энергетическая квадратичная форма анизотропного упругого тела Гука.** Введем энергию деформации  $\mathcal{U}$ , которая в термодинамическом плане является внутренней энергией для изоэнтропийных (адиабатических)

---

<sup>1</sup>В настоящее время, как показывает анализ библиографии, подавляющее большинство работ посвящено изотропному упругому телу Гука.

процессов.<sup>2</sup> В расчете на единичный инвариантный элемент объема при постоянной энтропии ( $S = \text{const}$ ) она может быть задана как функция тензора деформаций:

$$U \Big|_{\text{adiabatic}} = \mathcal{U}(\epsilon_{ij}). \quad (1)$$

Тензор полных деформаций  $\epsilon_{ij}$  принимается в качестве термодинамического базиса и вычисляется через перемещения  $u_i$  согласно фундаментальным соотношениям Коши:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{(ij)}, \quad 2\epsilon_{(ij)} = \partial_i u_j + \partial_j u_i. \quad (2)$$

где частная производная  $\partial_i$  по пространственной координате  $x^i$  вычисляется согласно

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Хорошо известно, что энергия деформации анизотропного упругого тела может быть представлена в виде:

$$\mathcal{U} = E_{(ij)(kl)} \epsilon_{(ij)} \epsilon_{(kl)} \quad (i, j, k, l = \overline{1, 3}), \quad (3)$$

где  $E_{(ij)(kl)}$  ( $i, j, k, l = \overline{1, 3}$ ) — тензор определяющих упругих постоянных/модулей. В самом общем случае на упругие модули не накладывается никаких ограничений. Здесь и далее будем придерживаться правила Эйнштейна, выполняя суммирование по повторяющимся индексам. Очевидно, эти константы могут интерпретироваться как определяющие упругие модули (абсолютные скаляры) при задании модели анизотропного упругого тела Гука. Кроме того, тензор определяющих упругих постоянных удовлетворяет условиям симметрии:

$$E_{(ij)(kl)} = E_{(kl)(ij)}, \quad E_{(ij)(kl)} = E_{(ji)(kl)}, \quad E_{(ij)(kl)} = E_{(ij)(lk)}. \quad (4)$$

Условия (4) определяют перестановочность пар индексов и индексов внутри пар. Важно заметить, что тензор четвертого ранга в трехмерном пространстве в общем случае имеет  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$  компонент. Однако, условия симметрии (4) позволяют уменьшить их количество до 21. Поэтому итоговая энергетическая форма анизотропного упругого тела Гука может быть представлена в достаточно компактном виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & E_{(11)(11)} \epsilon_{11}^2 + E_{(22)(22)} \epsilon_{22}^2 + E_{(33)(33)} \epsilon_{33}^2 + 2E_{(11)(22)} \epsilon_{11} \epsilon_{22} + \\ & + 2E_{(11)(33)} \epsilon_{11} \epsilon_{33} + 2E_{(22)(33)} \epsilon_{22} \epsilon_{33} + 4E_{(23)(23)} \epsilon_{23}^2 + 4E_{(13)(13)} \epsilon_{13}^2 + \\ & + 4E_{(12)(12)} \epsilon_{12}^2 + 4E_{(11)(23)} \epsilon_{11} \epsilon_{23} + 4E_{(11)(13)} \epsilon_{11} \epsilon_{13} + 4E_{(11)(12)} \epsilon_{11} \epsilon_{12} + \\ & + 4E_{(22)(23)} \epsilon_{22} \epsilon_{23} + 4E_{(22)(13)} \epsilon_{22} \epsilon_{13} + 4E_{(22)(12)} \epsilon_{22} \epsilon_{12} + 4E_{(33)(23)} \epsilon_{33} \epsilon_{23} + \\ & + 4E_{(33)(13)} \epsilon_{33} \epsilon_{13} + 4E_{(33)(12)} \epsilon_{33} \epsilon_{12} + 4E_{(23)(13)} \epsilon_{23} \epsilon_{13} + 4E_{(23)(12)} \epsilon_{23} \epsilon_{12} + \\ & + 4E_{(13)(12)} \epsilon_{13} \epsilon_{12}. \end{aligned} \quad (5)$$

<sup>2</sup>Адиабатические процессы — процессы без теплообмена с окружающей средой, т.е. сравнительно быстрые процессы (например, волновые).

|                                     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| пары тензорных индексов $(ij) (kl)$ | 11 | 22 | 33 | 23 | 32 | 31 | 13 | 12 | 21 |
| матричные индексы $(K) (N)$         | 1  | 2  | 3  | 4  | 4  | 5  | 5  | 6  | 6  |

Таблица 1. Соответствие пар тензорных и одинарных матричных индексов согласно Наю [24].

С целью упрощения оперирования с квадратичной формой (5) выполним замены независимых термодинамических переменных состояния  $\epsilon_{(ij)}$  в энергии деформации  $\mathcal{U}$  согласно следующим правилам [24]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{(11)} &\longleftrightarrow Y_1, & \epsilon_{(22)} &\longleftrightarrow Y_2, & \epsilon_{(33)} &\longleftrightarrow Y_3, \\ \epsilon_{(23)} &\longleftrightarrow Y_4, & \epsilon_{(13)} &\longleftrightarrow Y_5, & \epsilon_{(12)} &\longleftrightarrow Y_6. \end{aligned} \quad (6)$$

После перехода от термодинамического базиса  $\epsilon_{(ij)}$  к базису  $Y_1, \dots, Y_6$  получим:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(Y_1, \dots, Y_6). \quad (7)$$

Сформируем транспонированный вектор-строку в шестимерном пространстве формальных переменных:

$$[Y] = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6]^\top, \quad (8)$$

тогда функциональная зависимость (7) может быть представлена в виде:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}([Y]), \quad (9)$$

или в матричных обозначениях:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}([A], [Y]) = [Y]^\top [A] [Y], \quad (10)$$

где  $[A]$  — формальная квадратная матрица алгебраической размерности  $6 \times 6$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{52} & A_{62} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} & A_{53} & A_{63} \\ A_{14} & A_{24} & A_{43} & A_{44} & A_{54} & A_{64} \\ A_{15} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{65} \\ A_{16} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Представление (10) может быть записано в виде следующей формальной суммы:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & A_{11}Y_1^2 + A_{22}Y_2^2 + A_{33}Y_3^2 + A_{44}Y_4^2 + A_{55}Y_5^2 + A_{66}Y_6^2 + 2A_{12}Y_1Y_2 + 2A_{13}Y_1Y_3 + \\ & + 2A_{14}Y_1Y_4 + 2A_{15}Y_1Y_5 + 2A_{16}Y_1Y_6 + 2A_{23}Y_2Y_3 + 2A_{24}Y_2Y_4 + 2A_{52}Y_2Y_5 + \\ & + 2A_{62}Y_2Y_6 + 2A_{43}Y_3Y_4 + 2A_{53}Y_3Y_5 + 2A_{63}Y_3Y_6 + 2A_{54}Y_4Y_5 + 2A_{64}Y_4Y_6 + \\ & + 2A_{65}Y_5Y_6. \end{aligned} \quad (12)$$

Заменяем пары индексов у тензора упругих модулей  $E_{(ij)(kl)}$  на одинарные матричные индексы (см. Табл. 1) и расположим упругие модули в форме квадратной матрицы  $[E]$ :

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{52} & E_{62} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & E_{43} & E_{53} & E_{63} \\ E_{14} & E_{24} & E_{43} & E_{44} & E_{54} & E_{64} \\ E_{15} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{65} \\ E_{16} & E_{62} & E_{63} & E_{64} & E_{65} & E_{66} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Следует заметить, что изменение нумерации приведет к изменению матрицы  $[E]$ , но не нарушает физического содержания всех последующих рассмотрений. В матричном представлении (13) опущены круглые скобки, т.е., например,

$$E_{12} = E_{(1)(2)} = E_{(11)(22)} = E_{1122}. \quad (14)$$

На основании того, что

$$E_{1122} = E_{2211} = E_{(22)(11)} = E_{(2)(1)} = E_{21}, \quad (15)$$

и аналогично для всех других модулей имеем:

$$[E] = [E]^T \quad (16)$$

Элементы матрицы  $[A]$  вычисляются (мы опускаем детали) через элементы матрицы  $[E]$  согласно:

$$[A] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 2E_{14} & 2E_{15} & 2E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & 2E_{24} & 2E_{52} & 2E_{62} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & 2E_{43} & 2E_{53} & 2E_{63} \\ 2E_{14} & 2E_{24} & 2E_{43} & 4E_{44} & 4E_{54} & 4E_{64} \\ 2E_{15} & 2E_{52} & 2E_{53} & 4E_{54} & 4E_{55} & 4E_{65} \\ 2E_{16} & 2E_{62} & 2E_{63} & 4E_{64} & 4E_{65} & 4E_{66} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

откуда видно, что матрицы  $[A]$  и  $[E]$  не совпадают:

$$[A] \neq [E].$$

Однако, нетрудно установить, что симметричные матрицы  $[A]$  и  $[E]$  конгруэнтны [25, С. 354], причем

$$[A] = [D_{\text{diag}}][E][D_{\text{diag}}], \quad (18)$$

где

$$[D_{\text{diag}}] = \text{diag}[D_{\text{diag}}] = \text{diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2). \quad (19)$$

Следует отметить, что определение конгруэнтных матриц в общем случае выглядит следующим образом

$$[A] = [K]^T [E] [K],$$

где  $[K]$  — невырожденная квадратная матрица, той же размерности, что и матрица  $[A]$ . В рассматриваемом случае

$$[K] = [D_{\text{diag}}], \quad [D_{\text{diag}}]^\top = [D_{\text{diag}}].$$

Конгруэнтные матрицы обладают следующими важными свойствами:

- (1) Сохранение симметрии. Если  $[E]$  симметрична ( $[E]^\top = [E]$ ), то  $[A]$  также симметрична:

$$[A]^\top = [[D_{\text{diag}}]^\top [E] [D_{\text{diag}}]]^\top = [D_{\text{diag}}]^\top [E]^\top [D_{\text{diag}}] = [D_{\text{diag}}] [E] [D_{\text{diag}}] = [A]. \quad (20)$$

- (2) Закон инерции Сильвестра. У конгруэнтных матриц совпадает сигнатура — число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений, т.е.

$$\text{Signature}[A] = \text{Signature}[E]. \quad (21)$$

- (3) Сохранение ранга. Ранг не меняется при конгруэнтном преобразовании, т.к.  $[D]$  не вырождена:

$$\text{rank}[A] = \text{rank}[E]. \quad (22)$$

- (4) Изменение определителя. Определитель преобразуется по формуле

$$\det[A] = (\det[D_{\text{diag}}])^2 \cdot \det[E] = 64 \det[E]. \quad (23)$$

- (5) Сохранение положительной (отрицательной) определённости, являющиеся прямым следствием закона инерции Сильвестра. Если  $[E]$  положительно определена ( $[E] \succ 0$ ), то и  $[A]$  положительно определена:

$$[E] \succ 0 \iff [A] \succ 0. \quad (24)$$

- (6) Сохранение квадратичной формы с точностью до замены переменных. Для любого вектора-столбца  $[Y]$  справедливо

$$[Y]^\top [A] [Y] = [[D_{\text{diag}}]^{-1} [Y]]^\top [E] [[D_{\text{diag}}]^{-1} [Y]], \quad (25)$$

т.е. значения квадратичной формы при конгруэнтном преобразовании пересчитываются через замену координат.

Однако при конгруэнтном преобразовании не сохраняется: собственные значения, след матрицы и характеристический многочлен.

В частном случае, когда  $[D]$  ортогональна ( $[D]^\top = [D]^{-1}$ ), конгруэнтность совпадает с подобием, и тогда все перечисленные свойства подобия (включая сохранение собственных значений) выполняются.

С учетом (17) квадратичная форма энергии деформации анизотропного упругого тела Гука (10) записывается как сумма 21-го слагаемого:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & E_{11}Y_1^2 + E_{22}Y_2^2 + E_{33}Y_3^2 + 2E_{12}Y_1Y_2 + 2E_{13}Y_1Y_3 + 2E_{23}Y_2Y_3 \\ & + 4E_{14}Y_1Y_4 + 4E_{15}Y_1Y_5 + 4E_{16}Y_1Y_6 + 4E_{24}Y_2Y_4 + 4E_{43}Y_3Y_4 + 4E_{44}Y_4^2 \\ & + 4E_{52}Y_2Y_5 + 4E_{53}Y_3Y_5 + 4E_{55}Y_5^2 + 4E_{62}Y_2Y_6 + 4E_{63}Y_3Y_6 + 4E_{66}Y_6^2 \\ & + 8E_{54}Y_4Y_5 + 8E_{64}Y_4Y_6 + 8E_{65}Y_5Y_6. \end{aligned} \quad (26)$$

В дальнейшем в аналогичных рассуждениях принимается матрицу  $[A]$ , вычисляемую согласно (17).

**3. Определяющие неравенства, обеспечивающие устойчивость положений равновесия анизотропного упругого тела Гука** Систему определяющих неравенств, обеспечивающую устойчивость равновесия анизотропного упругого тела Гука, получим, следуя критерию Сильвестра. Существует много других подходов к выяснению рассматриваемых вопросов, например, с помощью вычисления собственных значений [17–19]. Кроме того, поиск собственных значений можно проводить различными численно-аналитическими методами: алгоритм Леверье–Фаддеева, метод Ланцоша, QR-алгоритм, степенной метод, метод обратных итераций и т.д. Согласно критерию Сильвестра знакоопределенность квадратичной формы можно определить проверкой знаков ее главных (левых верхних угловых) миноров. Главным (левым верхним «угловым») минором порядка  $k$  называется определитель квадратной матрицы алгебраической размерности  $k \times k$ , образованной пересечением  $k$  первых строк и  $k$  первых столбцов исходной матрицы [25]. В случае положительной определенности квадратичной формы главные миноры ее матрицы должны быть положительны.

В рассматриваемом случае, квадратная матрица  $[A]$  будет иметь 6 главных миноров.

Главный минор порядка 1:

$$e_1 = E_{11}; \quad (27)$$

Главный минор порядка 2:

$$e_2 = \det \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{12} & E_{22} \end{bmatrix}; \quad (28)$$

Главный минор порядка 3:

$$e_3 = \det \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix}; \quad (29)$$

Главный минор порядка 4:

$$e_4 = \det \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 2E_{14} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & 2E_{24} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & 2E_{43} \\ 2E_{14} & 2E_{24} & 2E_{43} & 4E_{44} \end{bmatrix}; \quad (30)$$

Главный минор порядка 5:

$$e_5 = \det \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 2E_{14} & 2E_{15} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & 2E_{24} & 2E_{52} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & 2E_{43} & 2E_{53} \\ 2E_{14} & 2E_{24} & 2E_{43} & 4E_{44} & 4E_{54} \\ 2E_{15} & 2E_{52} & 2E_{53} & 4E_{54} & 4E_{55} \end{bmatrix}; \quad (31)$$

Главный минор порядка 6:

$$e_6 = \det[A]. \quad (32)$$

Положительная определенность квадратичной формы (9) согласно критерию Сильвестра обеспечивается совместным выполнением шести неравенств:

$$e_s > 0 \quad (s = \overline{1, 6}). \quad (33)$$

Вычислив определители  $e_1, \dots, e_6$  и подставив их в систему неравенств (33), получим:

$$\begin{aligned} & E_{11} > 0, \\ & E_{11}E_{22} - E_{12}^2 > 0, \\ & E_{11}E_{22}E_{33} - E_{11}E_{23}^2 - E_{12}^2E_{33} + 2E_{12}E_{13}E_{23} - E_{13}^2E_{22} > 0, \\ & E_{11}E_{22}E_{33}E_{44} - E_{11}E_{22}E_{43}^2 - E_{11}E_{23}^2E_{44} + 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{43} - E_{11}E_{24}^2E_{33} - \\ & - E_{12}^2E_{33}E_{44} + E_{12}^2E_{43}^2 + 2E_{12}E_{13}E_{23}E_{44} - 2E_{12}E_{13}E_{24}E_{43} - 2E_{12}E_{14}E_{23}E_{43} + \\ & + 2E_{12}E_{14}E_{24}E_{33} - E_{13}^2E_{22}E_{44} + E_{13}^2E_{24}^2 + 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{43} - 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{24} - \\ & - E_{14}^2E_{22}E_{33} + E_{14}^2E_{23}^2 > 0, \\ & E_{11}E_{22}E_{33}E_{44}E_{55} - E_{11}E_{22}E_{33}E_{54}^2 - E_{11}E_{22}E_{43}^2E_{55} + 2E_{11}E_{22}E_{43}E_{53}E_{54} - \\ & - E_{11}E_{22}E_{44}E_{53}^2 - E_{11}E_{23}^2E_{44}E_{55} + E_{11}E_{23}^2E_{54}^2 + 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{43}E_{55} - \\ & - 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{53}E_{54} - 2E_{11}E_{23}E_{43}E_{52}E_{54} + 2E_{11}E_{23}E_{44}E_{52}E_{53} - E_{11}E_{24}^2E_{33}E_{55} + \\ & + E_{11}E_{24}^2E_{53}^2 + 2E_{11}E_{24}E_{33}E_{52}E_{54} - 2E_{11}E_{24}E_{43}E_{52}E_{53} - E_{11}E_{33}E_{44}E_{52}^2 + \\ & + E_{11}E_{43}^2E_{52}^2 - E_{12}^2E_{33}E_{44}E_{55} + E_{12}^2E_{33}E_{54}^2 + E_{12}^2E_{43}^2E_{55} - 2E_{12}^2E_{43}E_{53}E_{54} + \\ & + E_{12}^2E_{44}E_{53}^2 + 2E_{12}E_{13}E_{23}E_{44}E_{55} - 2E_{12}E_{13}E_{23}E_{54}^2 - 2E_{12}E_{13}E_{24}E_{43}E_{55} + \\ & + 2E_{12}E_{13}E_{24}E_{53}E_{54} + 2E_{12}E_{13}E_{43}E_{52}E_{54} - 2E_{12}E_{13}E_{44}E_{52}E_{53} + E_{15}^2E_{23}^2E_{44} - \\ & - 2E_{12}E_{14}E_{23}E_{43}E_{55} + 2E_{12}E_{14}E_{23}E_{53}E_{54} + 2E_{12}E_{14}E_{24}E_{33}E_{55} - 2E_{12}E_{14}E_{24}E_{53}^2 - \\ & - 2E_{12}E_{14}E_{33}E_{52}E_{54} + 2E_{12}E_{14}E_{43}E_{52}E_{53} + 2E_{12}E_{15}E_{23}E_{43}E_{54} + E_{15}^2E_{24}^2E_{33} - \\ & - 2E_{12}E_{15}E_{23}E_{44}E_{53} - 2E_{12}E_{15}E_{24}E_{33}E_{54} + 2E_{12}E_{15}E_{24}E_{43}E_{53} + \\ & + 2E_{12}E_{15}E_{33}E_{44}E_{52} - 2E_{12}E_{15}E_{43}^2E_{52} - E_{13}^2E_{22}E_{44}E_{55} + E_{13}^2E_{22}E_{54}^2 + \\ & + E_{13}^2E_{24}^2E_{55} - 2E_{13}^2E_{24}E_{52}E_{54} + E_{13}^2E_{44}E_{52}^2 + 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{43}E_{55} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2E_{13}E_{14}E_{22}E_{53}E_{54} - 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{24}E_{55} + 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{52}E_{54} - 2E_{15}^2E_{23}E_{24}E_{43} + \\
& + 2E_{13}E_{14}E_{24}E_{52}E_{53} - 2E_{13}E_{14}E_{43}E_{52}^2 - 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{43}E_{54} + 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{44}E_{53} + \\
& + 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{24}E_{54} - 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{44}E_{52} - 2E_{13}E_{15}E_{24}^2E_{53} + 2E_{13}E_{15}E_{24}E_{43}E_{52} - \\
& - E_{14}^2E_{22}E_{33}E_{55} + E_{14}^2E_{22}E_{53}^2 + E_{14}^2E_{23}^2E_{55} - 2E_{14}^2E_{23}E_{52}E_{53} + E_{14}^2E_{33}E_{52}^2 + \\
& + 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{33}E_{54} - 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{43}E_{53} - 2E_{14}E_{15}E_{23}^2E_{54} + 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{24}E_{53} + \\
& + 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{43}E_{52} - 2E_{14}E_{15}E_{24}E_{33}E_{52} - E_{15}^2E_{22}E_{33}E_{44} + E_{15}^2E_{22}E_{43}^2 > 0, \\
& - E_{54}^2E_{63}^2E_{12}^2 + E_{44}E_{55}E_{63}^2E_{12}^2 - E_{53}^2E_{64}^2E_{12}^2 + E_{33}E_{55}E_{64}^2E_{12}^2 - \\
& - E_{43}^2E_{65}^2E_{12}^2 + E_{33}E_{44}E_{65}^2E_{12}^2 + 2E_{53}E_{54}E_{63}E_{64}E_{12}^2 - \\
& - 2E_{43}E_{55}E_{63}E_{64}E_{12}^2 - 2E_{44}E_{53}E_{63}E_{65}E_{12}^2 + 2E_{43}E_{54}E_{63}E_{65}E_{12}^2 + \\
& + 2E_{43}E_{53}E_{64}E_{65}E_{12}^2 - 2E_{33}E_{54}E_{64}E_{65}E_{12}^2 + E_{44}E_{53}^2E_{66}E_{12}^2 + \\
& + E_{33}E_{54}^2E_{66}E_{12}^2 - 2E_{43}E_{53}E_{54}E_{66}E_{12}^2 + E_{43}^2E_{55}E_{66}E_{12}^2 - \\
& - E_{33}E_{44}E_{55}E_{66}E_{12}^2 - 2E_{15}E_{44}E_{52}E_{63}^2E_{12} + 2E_{15}E_{24}E_{54}E_{63}^2E_{12} + \\
& + 2E_{14}E_{52}E_{54}E_{63}^2E_{12} - 2E_{14}E_{24}E_{55}E_{63}^2E_{12} - 2E_{15}E_{33}E_{52}E_{64}^2E_{12} + \\
& + 2E_{15}E_{23}E_{53}E_{64}^2E_{12} + 2E_{13}E_{52}E_{53}E_{64}^2E_{12} - 2E_{13}E_{23}E_{55}E_{64}^2E_{12} - \\
& - 2E_{14}E_{24}E_{33}E_{65}^2E_{12} + 2E_{14}E_{23}E_{43}E_{65}^2E_{12} + 2E_{13}E_{24}E_{43}E_{65}^2E_{12} - \\
& - 2E_{13}E_{23}E_{44}E_{65}^2E_{12} - 2E_{16}E_{44}E_{53}^2E_{62}E_{12} - 2E_{16}E_{33}E_{54}^2E_{62}E_{12} + \\
& + 4E_{16}E_{43}E_{53}E_{54}E_{62}E_{12} - 2E_{16}E_{43}^2E_{55}E_{62}E_{12} + 2E_{16}E_{33}E_{44}E_{55}E_{62}E_{12} + \\
& + 2E_{16}E_{23}E_{54}^2E_{63}E_{12} + 2E_{16}E_{44}E_{52}E_{53}E_{63}E_{12} - 2E_{16}E_{43}E_{52}E_{54}E_{63}E_{12} - \\
& - 2E_{16}E_{24}E_{53}E_{54}E_{63}E_{12} + 2E_{16}E_{24}E_{43}E_{55}E_{63}E_{12} - 2E_{16}E_{23}E_{44}E_{55}E_{63}E_{12} + \\
& + 2E_{13}E_{54}^2E_{62}E_{63}E_{12} + 2E_{15}E_{44}E_{53}E_{62}E_{63}E_{12} - 2E_{15}E_{43}E_{54}E_{62}E_{63}E_{12} - \\
& - 2E_{14}E_{53}E_{54}E_{62}E_{63}E_{12} + 2E_{14}E_{43}E_{55}E_{62}E_{63}E_{12} - 2E_{13}E_{44}E_{55}E_{62}E_{63}E_{12} + \\
& + 2E_{16}E_{24}E_{53}^2E_{64}E_{12} - 2E_{16}E_{43}E_{52}E_{53}E_{64}E_{12} + 2E_{16}E_{33}E_{52}E_{54}E_{64}E_{12} - \\
& - 2E_{16}E_{23}E_{53}E_{54}E_{64}E_{12} - 2E_{16}E_{24}E_{33}E_{55}E_{64}E_{12} + 2E_{16}E_{23}E_{43}E_{55}E_{64}E_{12} + \\
& + 2E_{14}E_{53}^2E_{62}E_{64}E_{12} - 2E_{15}E_{43}E_{53}E_{62}E_{64}E_{12} + 2E_{15}E_{33}E_{54}E_{62}E_{64}E_{12} - \\
& - 2E_{13}E_{53}E_{54}E_{62}E_{64}E_{12} - 2E_{14}E_{33}E_{55}E_{62}E_{64}E_{12} + 2E_{13}E_{43}E_{55}E_{62}E_{64}E_{12} + \\
& + 4E_{15}E_{43}E_{52}E_{63}E_{64}E_{12} - 2E_{15}E_{24}E_{53}E_{63}E_{64}E_{12} - 2E_{14}E_{52}E_{53}E_{63}E_{64}E_{12} - \\
& - 2E_{15}E_{23}E_{54}E_{63}E_{64}E_{12} - 2E_{13}E_{52}E_{54}E_{63}E_{64}E_{12} + 2E_{14}E_{23}E_{55}E_{63}E_{64}E_{12} + \\
& + 2E_{13}E_{24}E_{55}E_{63}E_{64}E_{12} + 2E_{16}E_{43}^2E_{52}E_{65}E_{12} - 2E_{16}E_{33}E_{44}E_{52}E_{65}E_{12} - \\
& - 2E_{16}E_{24}E_{43}E_{53}E_{65}E_{12} + 2E_{16}E_{23}E_{44}E_{53}E_{65}E_{12} + 2E_{16}E_{24}E_{33}E_{54}E_{65}E_{12} - \\
& - 2E_{16}E_{23}E_{43}E_{54}E_{65}E_{12} + 2E_{15}E_{43}^2E_{62}E_{65}E_{12} - 2E_{15}E_{33}E_{44}E_{62}E_{65}E_{12} - \\
& - 2E_{14}E_{43}E_{53}E_{62}E_{65}E_{12} + 2E_{13}E_{44}E_{53}E_{62}E_{65}E_{12} + 2E_{14}E_{33}E_{54}E_{62}E_{65}E_{12} - \\
& - 2E_{13}E_{43}E_{54}E_{62}E_{65}E_{12} - 2E_{15}E_{24}E_{43}E_{63}E_{65}E_{12} + 2E_{15}E_{23}E_{44}E_{63}E_{65}E_{12} - \\
& - 2E_{14}E_{43}E_{52}E_{63}E_{65}E_{12} + 2E_{13}E_{44}E_{52}E_{63}E_{65}E_{12} + 4E_{14}E_{24}E_{53}E_{63}E_{65}E_{12} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2E_{14}E_{23}E_{54}E_{63}E_{65}E_{12} - 2E_{13}E_{24}E_{54}E_{63}E_{65}E_{12} + 2E_{15}E_{24}E_{33}E_{64}E_{65}E_{12} - \\
& -2E_{15}E_{23}E_{43}E_{64}E_{65}E_{12} + 2E_{14}E_{33}E_{52}E_{64}E_{65}E_{12} - 2E_{13}E_{43}E_{52}E_{64}E_{65}E_{12} - \\
& -2E_{14}E_{23}E_{53}E_{64}E_{65}E_{12} - 2E_{13}E_{24}E_{53}E_{64}E_{65}E_{12} + 4E_{13}E_{23}E_{54}E_{64}E_{65}E_{12} - \\
& -2E_{14}E_{24}E_{53}^2E_{66}E_{12} - 2E_{13}E_{23}E_{54}^2E_{66}E_{12} - 2E_{15}E_{43}^2E_{52}E_{66}E_{12} + \\
& + 2E_{15}E_{33}E_{44}E_{52}E_{66}E_{12} + 2E_{15}E_{24}E_{43}E_{53}E_{66}E_{12} - 2E_{15}E_{23}E_{44}E_{53}E_{66}E_{12} + \\
& + 2E_{14}E_{43}E_{52}E_{53}E_{66}E_{12} - 2E_{13}E_{44}E_{52}E_{53}E_{66}E_{12} - 2E_{15}E_{24}E_{33}E_{54}E_{66}E_{12} + \\
& + 2E_{15}E_{23}E_{43}E_{54}E_{66}E_{12} - 2E_{14}E_{33}E_{52}E_{54}E_{66}E_{12} + 2E_{13}E_{43}E_{52}E_{54}E_{66}E_{12} + \\
& + 2E_{14}E_{23}E_{53}E_{54}E_{66}E_{12} + 2E_{13}E_{24}E_{53}E_{54}E_{66}E_{12} + 2E_{14}E_{24}E_{33}E_{55}E_{66}E_{12} - \\
& - 2E_{14}E_{23}E_{43}E_{55}E_{66}E_{12} - 2E_{13}E_{24}E_{43}E_{55}E_{66}E_{12} + 2E_{13}E_{23}E_{44}E_{55}E_{66}E_{12} - \\
& - E_{16}^2E_{43}^2E_{52}^2 + E_{16}^2E_{33}E_{44}E_{52}^2 - E_{16}^2E_{24}^2E_{53}^2 + E_{16}^2E_{22}E_{44}E_{53}^2 - \\
& - E_{16}^2E_{23}^2E_{54}^2 + E_{16}^2E_{22}E_{33}E_{54}^2 - E_{15}^2E_{43}^2E_{62}^2 - E_{14}^2E_{53}^2E_{62}^2 + \\
& + E_{11}E_{44}E_{53}^2E_{62}^2 - E_{13}^2E_{54}^2E_{62}^2 + E_{11}E_{33}E_{54}^2E_{62}^2 + E_{15}^2E_{33}E_{44}E_{62}^2 + \\
& + 2E_{14}E_{15}E_{43}E_{53}E_{62}^2 - 2E_{13}E_{15}E_{44}E_{53}E_{62}^2 - 2E_{14}E_{15}E_{33}E_{54}E_{62}^2 + \\
& + 2E_{13}E_{15}E_{43}E_{54}E_{62}^2 + 2E_{13}E_{14}E_{53}E_{54}E_{62}^2 - 2E_{11}E_{43}E_{53}E_{54}E_{62}^2 + \\
& + E_{11}E_{43}^2E_{55}E_{62}^2 + E_{14}^2E_{33}E_{55}E_{62}^2 - 2E_{13}E_{14}E_{43}E_{55}E_{62}^2 + \\
& + E_{13}^2E_{44}E_{55}E_{62}^2 - E_{11}E_{33}E_{44}E_{55}E_{62}^2 - E_{15}^2E_{24}^2E_{63}^2 - E_{14}^2E_{52}^2E_{63}^2 + \\
& + E_{11}E_{44}E_{52}^2E_{63}^2 + E_{11}E_{22}E_{54}^2E_{63}^2 + E_{15}^2E_{22}E_{44}E_{63}^2 + \\
& + 2E_{14}E_{15}E_{24}E_{52}E_{63}^2 - 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{54}E_{63}^2 - 2E_{11}E_{24}E_{52}E_{54}E_{63}^2 + \\
& + E_{11}E_{24}^2E_{55}E_{63}^2 + E_{14}^2E_{22}E_{55}E_{63}^2 - E_{11}E_{22}E_{44}E_{55}E_{63}^2 - E_{15}^2E_{23}^2E_{64}^2 - \\
& - E_{13}^2E_{52}^2E_{64}^2 + E_{11}E_{33}E_{52}^2E_{64}^2 + E_{11}E_{22}E_{53}^2E_{64}^2 + E_{15}^2E_{22}E_{33}E_{64}^2 + \\
& + 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{52}E_{64}^2 - 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{53}E_{64}^2 - 2E_{11}E_{23}E_{52}E_{53}E_{64}^2 + \\
& + E_{11}E_{23}^2E_{55}E_{64}^2 + E_{13}^2E_{22}E_{55}E_{64}^2 - E_{11}E_{22}E_{33}E_{55}E_{64}^2 - E_{14}^2E_{23}^2E_{65}^2 - \\
& - E_{13}^2E_{24}^2E_{65}^2 + E_{11}E_{22}E_{43}^2E_{65}^2 + 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{24}E_{65}^2 + E_{11}E_{24}^2E_{33}E_{65}^2 + \\
& + E_{14}^2E_{22}E_{33}E_{65}^2 - 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{43}E_{65}^2 - 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{43}E_{65}^2 + \\
& + E_{11}E_{23}^2E_{44}E_{65}^2 + E_{13}^2E_{22}E_{44}E_{65}^2 - E_{11}E_{22}E_{33}E_{44}E_{65}^2 + \\
& + 2E_{16}^2E_{24}E_{43}E_{52}E_{53} - 2E_{16}^2E_{23}E_{44}E_{52}E_{53} - 2E_{16}^2E_{24}E_{33}E_{52}E_{54} + \\
& + 2E_{16}^2E_{23}E_{43}E_{52}E_{54} + 2E_{16}^2E_{23}E_{24}E_{53}E_{54} - 2E_{16}^2E_{22}E_{43}E_{53}E_{54} + \\
& + E_{16}^2E_{22}E_{43}^2E_{55} + E_{16}^2E_{24}^2E_{33}E_{55} - 2E_{16}^2E_{23}E_{24}E_{43}E_{55} + \\
& + E_{16}^2E_{23}^2E_{44}E_{55} - E_{16}^2E_{22}E_{33}E_{44}E_{55} + 2E_{14}E_{16}E_{24}E_{53}^2E_{62} + \\
& + 2E_{13}E_{16}E_{23}E_{54}^2E_{62} + 2E_{15}E_{16}E_{43}^2E_{52}E_{62} - 2E_{15}E_{16}E_{33}E_{44}E_{52}E_{62} - \\
& - 2E_{15}E_{16}E_{24}E_{43}E_{53}E_{62} + 2E_{15}E_{16}E_{23}E_{44}E_{53}E_{62} - 2E_{14}E_{16}E_{43}E_{52}E_{53}E_{62} + \\
& + 2E_{13}E_{16}E_{44}E_{52}E_{53}E_{62} + 2E_{15}E_{16}E_{24}E_{33}E_{54}E_{62} - 2E_{15}E_{16}E_{23}E_{43}E_{54}E_{62} + \\
& + 2E_{14}E_{16}E_{33}E_{52}E_{54}E_{62} - 2E_{13}E_{16}E_{43}E_{52}E_{54}E_{62} - 2E_{14}E_{16}E_{23}E_{53}E_{54}E_{62} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2E_{13}E_{16}E_{24}E_{53}E_{54}E_{62} - 2E_{14}E_{16}E_{24}E_{33}E_{55}E_{62} + 2E_{14}E_{16}E_{23}E_{43}E_{55}E_{62} + \\
& + 2E_{13}E_{16}E_{24}E_{43}E_{55}E_{62} - 2E_{13}E_{16}E_{23}E_{44}E_{55}E_{62} + 2E_{14}E_{16}E_{43}E_{52}^2E_{63} - \\
& - 2E_{13}E_{16}E_{44}E_{52}^2E_{63} - 2E_{13}E_{16}E_{22}E_{54}^2E_{63} - 2E_{15}E_{16}E_{24}E_{43}E_{52}E_{63} + \\
& + 2E_{15}E_{16}E_{23}E_{44}E_{52}E_{63} + 2E_{15}E_{16}E_{24}^2E_{53}E_{63} - 2E_{15}E_{16}E_{22}E_{44}E_{53}E_{63} - \\
& - 2E_{14}E_{16}E_{24}E_{52}E_{53}E_{63} - 2E_{15}E_{16}E_{23}E_{24}E_{54}E_{63} + 2E_{15}E_{16}E_{22}E_{43}E_{54}E_{63} - \\
& - 2E_{14}E_{16}E_{23}E_{52}E_{54}E_{63} + 4E_{13}E_{16}E_{24}E_{52}E_{54}E_{63} + 2E_{14}E_{16}E_{22}E_{53}E_{54}E_{63} - \\
& - 2E_{13}E_{16}E_{24}^2E_{55}E_{63} + 2E_{14}E_{16}E_{23}E_{24}E_{55}E_{63} - 2E_{14}E_{16}E_{22}E_{43}E_{55}E_{63} + \\
& + 2E_{13}E_{16}E_{22}E_{44}E_{55}E_{63} - 2E_{11}E_{23}E_{54}^2E_{62}E_{63} + 2E_{15}^2E_{24}E_{43}E_{62}E_{63} - \\
& - 2E_{15}^2E_{23}E_{44}E_{62}E_{63} - 2E_{14}E_{15}E_{43}E_{52}E_{62}E_{63} + 2E_{13}E_{15}E_{44}E_{52}E_{62}E_{63} - \\
& - 2E_{14}E_{15}E_{24}E_{53}E_{62}E_{63} + 2E_{14}^2E_{52}E_{53}E_{62}E_{63} - 2E_{11}E_{44}E_{52}E_{53}E_{62}E_{63} + \\
& + 4E_{14}E_{15}E_{23}E_{54}E_{62}E_{63} - 2E_{13}E_{15}E_{24}E_{54}E_{62}E_{63} - 2E_{13}E_{14}E_{52}E_{54}E_{62}E_{63} + \\
& + 2E_{11}E_{43}E_{52}E_{54}E_{62}E_{63} + 2E_{11}E_{24}E_{53}E_{54}E_{62}E_{63} - 2E_{14}^2E_{23}E_{55}E_{62}E_{63} + \\
& + 2E_{13}E_{14}E_{24}E_{55}E_{62}E_{63} - 2E_{11}E_{24}E_{43}E_{55}E_{62}E_{63} + 2E_{11}E_{23}E_{44}E_{55}E_{62}E_{63} - \\
& - 2E_{14}E_{16}E_{33}E_{52}^2E_{64} + 2E_{13}E_{16}E_{43}E_{52}^2E_{64} - 2E_{14}E_{16}E_{22}E_{53}^2E_{64} + \\
& + 2E_{15}E_{16}E_{24}E_{33}E_{52}E_{64} - 2E_{15}E_{16}E_{23}E_{43}E_{52}E_{64} - 2E_{15}E_{16}E_{23}E_{24}E_{53}E_{64} + \\
& + 2E_{15}E_{16}E_{22}E_{43}E_{53}E_{64} + 4E_{14}E_{16}E_{23}E_{52}E_{53}E_{64} - 2E_{13}E_{16}E_{24}E_{52}E_{53}E_{64} + \\
& + 2E_{15}E_{16}E_{23}^2E_{54}E_{64} - 2E_{15}E_{16}E_{22}E_{33}E_{54}E_{64} - 2E_{13}E_{16}E_{23}E_{52}E_{54}E_{64} + \\
& + 2E_{13}E_{16}E_{22}E_{53}E_{54}E_{64} - 2E_{14}E_{16}E_{23}^2E_{55}E_{64} + 2E_{13}E_{16}E_{23}E_{24}E_{55}E_{64} + \\
& + 2E_{14}E_{16}E_{22}E_{33}E_{55}E_{64} - 2E_{13}E_{16}E_{22}E_{43}E_{55}E_{64} - 2E_{11}E_{24}E_{53}^2E_{62}E_{64} - \\
& - 2E_{15}^2E_{24}E_{33}E_{62}E_{64} + 2E_{15}^2E_{23}E_{43}E_{62}E_{64} + 2E_{14}E_{15}E_{33}E_{52}E_{62}E_{64} - \\
& - 2E_{13}E_{15}E_{43}E_{52}E_{62}E_{64} - 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{53}E_{62}E_{64} + 4E_{13}E_{15}E_{24}E_{53}E_{62}E_{64} - \\
& - 2E_{13}E_{14}E_{52}E_{53}E_{62}E_{64} + 2E_{11}E_{43}E_{52}E_{53}E_{62}E_{64} - 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{54}E_{62}E_{64} + \\
& + 2E_{13}^2E_{52}E_{54}E_{62}E_{64} - 2E_{11}E_{33}E_{52}E_{54}E_{62}E_{64} + 2E_{11}E_{23}E_{53}E_{54}E_{62}E_{64} + \\
& + 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{55}E_{62}E_{64} - 2E_{13}^2E_{24}E_{55}E_{62}E_{64} + 2E_{11}E_{24}E_{33}E_{55}E_{62}E_{64} - \\
& - 2E_{11}E_{23}E_{43}E_{55}E_{62}E_{64} + 2E_{13}E_{14}E_{52}^2E_{63}E_{64} - 2E_{11}E_{43}E_{52}^2E_{63}E_{64} + \\
& + 2E_{15}^2E_{23}E_{24}E_{63}E_{64} - 2E_{15}^2E_{22}E_{43}E_{63}E_{64} - 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{52}E_{63}E_{64} - \\
& - 2E_{13}E_{15}E_{24}E_{52}E_{63}E_{64} + 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{53}E_{63}E_{64} + 2E_{11}E_{24}E_{52}E_{53}E_{63}E_{64} + \\
& + 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{54}E_{63}E_{64} + 2E_{11}E_{23}E_{52}E_{54}E_{63}E_{64} - 2E_{11}E_{22}E_{53}E_{54}E_{63}E_{64} - \\
& - 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{55}E_{63}E_{64} - 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{55}E_{63}E_{64} + 2E_{11}E_{22}E_{43}E_{55}E_{63}E_{64} - \\
& - 2E_{15}E_{16}E_{22}E_{43}^2E_{65} - 2E_{15}E_{16}E_{24}^2E_{33}E_{65} + 4E_{15}E_{16}E_{23}E_{24}E_{43}E_{65} - \\
& - 2E_{15}E_{16}E_{23}^2E_{44}E_{65} + 2E_{15}E_{16}E_{22}E_{33}E_{44}E_{65} + 2E_{14}E_{16}E_{24}E_{33}E_{52}E_{65} - \\
& - 2E_{14}E_{16}E_{23}E_{43}E_{52}E_{65} - 2E_{13}E_{16}E_{24}E_{43}E_{52}E_{65} + 2E_{13}E_{16}E_{23}E_{44}E_{52}E_{65} + \\
& + 2E_{13}E_{16}E_{24}^2E_{53}E_{65} - 2E_{14}E_{16}E_{23}E_{24}E_{53}E_{65} + 2E_{14}E_{16}E_{22}E_{43}E_{53}E_{65} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2E_{13}E_{16}E_{22}E_{44}E_{53}E_{65} + 2E_{14}E_{16}E_{23}^2E_{54}E_{65} - 2E_{13}E_{16}E_{23}E_{24}E_{54}E_{65} - \\
& -2E_{14}E_{16}E_{22}E_{33}E_{54}E_{65} + 2E_{13}E_{16}E_{22}E_{43}E_{54}E_{65} + 2E_{14}E_{15}E_{24}E_{33}E_{62}E_{65} - \\
& -2E_{14}E_{15}E_{23}E_{43}E_{62}E_{65} - 2E_{13}E_{15}E_{24}E_{43}E_{62}E_{65} + 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{44}E_{62}E_{65} - \\
& -2E_{11}E_{43}^2E_{52}E_{62}E_{65} - 2E_{14}^2E_{33}E_{52}E_{62}E_{65} + 4E_{13}E_{14}E_{43}E_{52}E_{62}E_{65} - \\
& -2E_{13}^2E_{44}E_{52}E_{62}E_{65} + 2E_{11}E_{33}E_{44}E_{52}E_{62}E_{65} + 2E_{14}^2E_{23}E_{53}E_{62}E_{65} - \\
& -2E_{13}E_{14}E_{24}E_{53}E_{62}E_{65} + 2E_{11}E_{24}E_{43}E_{53}E_{62}E_{65} - 2E_{11}E_{23}E_{44}E_{53}E_{62}E_{65} - \\
& -2E_{13}E_{14}E_{23}E_{54}E_{62}E_{65} + 2E_{13}^2E_{24}E_{54}E_{62}E_{65} - 2E_{11}E_{24}E_{33}E_{54}E_{62}E_{65} + \\
& + 2E_{11}E_{23}E_{43}E_{54}E_{62}E_{65} + 2E_{13}E_{15}E_{24}^2E_{63}E_{65} - 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{24}E_{63}E_{65} + \\
& + 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{43}E_{63}E_{65} - 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{44}E_{63}E_{65} + 2E_{14}^2E_{23}E_{52}E_{63}E_{65} - \\
& -2E_{13}E_{14}E_{24}E_{52}E_{63}E_{65} + 2E_{11}E_{24}E_{43}E_{52}E_{63}E_{65} - 2E_{11}E_{23}E_{44}E_{52}E_{63}E_{65} - \\
& -2E_{11}E_{24}^2E_{53}E_{63}E_{65} - 2E_{14}^2E_{22}E_{53}E_{63}E_{65} + 2E_{11}E_{22}E_{44}E_{53}E_{63}E_{65} + \\
& + 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{54}E_{63}E_{65} + 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{54}E_{63}E_{65} - 2E_{11}E_{22}E_{43}E_{54}E_{63}E_{65} + \\
& + 2E_{14}E_{15}E_{23}^2E_{64}E_{65} - 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{24}E_{64}E_{65} - 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{33}E_{64}E_{65} + \\
& + 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{43}E_{64}E_{65} - 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{52}E_{64}E_{65} + 2E_{13}^2E_{24}E_{52}E_{64}E_{65} - \\
& -2E_{11}E_{24}E_{33}E_{52}E_{64}E_{65} + 2E_{11}E_{23}E_{43}E_{52}E_{64}E_{65} + 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{53}E_{64}E_{65} + \\
& + 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{53}E_{64}E_{65} - 2E_{11}E_{22}E_{43}E_{53}E_{64}E_{65} - 2E_{11}E_{23}^2E_{54}E_{64}E_{65} - \\
& -2E_{13}^2E_{22}E_{54}E_{64}E_{65} + 2E_{11}E_{22}E_{33}E_{54}E_{64}E_{65} + E_{15}^2E_{22}E_{43}^2E_{66} + \\
& + E_{11}E_{43}^2E_{52}^2E_{66} + E_{14}^2E_{33}E_{52}^2E_{66} - 2E_{13}E_{14}E_{43}E_{52}^2E_{66} + \\
& + E_{13}^2E_{44}E_{52}^2E_{66} - E_{11}E_{33}E_{44}E_{52}^2E_{66} + E_{11}E_{24}^2E_{53}^2E_{66} + E_{14}^2E_{22}E_{53}^2E_{66} - \\
& - E_{11}E_{22}E_{44}E_{53}^2E_{66} + E_{11}E_{23}^2E_{54}^2E_{66} + E_{13}^2E_{22}E_{54}^2E_{66} - \\
& - E_{11}E_{22}E_{33}E_{54}^2E_{66} + E_{15}^2E_{24}^2E_{33}E_{66} - 2E_{15}^2E_{23}E_{24}E_{43}E_{66} + \\
& + E_{15}^2E_{23}^2E_{44}E_{66} - E_{15}^2E_{22}E_{33}E_{44}E_{66} - 2E_{14}E_{15}E_{24}E_{33}E_{52}E_{66} + \\
& + 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{43}E_{52}E_{66} + 2E_{13}E_{15}E_{24}E_{43}E_{52}E_{66} - 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{44}E_{52}E_{66} - \\
& - 2E_{13}E_{15}E_{24}^2E_{53}E_{66} + 2E_{14}E_{15}E_{23}E_{24}E_{53}E_{66} - 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{43}E_{53}E_{66} + \\
& + 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{44}E_{53}E_{66} - 2E_{14}^2E_{23}E_{52}E_{53}E_{66} + 2E_{13}E_{14}E_{24}E_{52}E_{53}E_{66} - \\
& - 2E_{11}E_{24}E_{43}E_{52}E_{53}E_{66} + 2E_{11}E_{23}E_{44}E_{52}E_{53}E_{66} - 2E_{14}E_{15}E_{23}^2E_{54}E_{66} + \\
& + 2E_{13}E_{15}E_{23}E_{24}E_{54}E_{66} + 2E_{14}E_{15}E_{22}E_{33}E_{54}E_{66} - 2E_{13}E_{15}E_{22}E_{43}E_{54}E_{66} + \\
& + 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{52}E_{54}E_{66} - 2E_{13}^2E_{24}E_{52}E_{54}E_{66} + 2E_{11}E_{24}E_{33}E_{52}E_{54}E_{66} - \\
& - 2E_{11}E_{23}E_{43}E_{52}E_{54}E_{66} - 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{53}E_{54}E_{66} - 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{53}E_{54}E_{66} + \\
& + 2E_{11}E_{22}E_{43}E_{53}E_{54}E_{66} + E_{14}^2E_{23}^2E_{55}E_{66} + E_{13}^2E_{24}^2E_{55}E_{66} - \\
& - E_{11}E_{22}E_{43}^2E_{55}E_{66} - 2E_{13}E_{14}E_{23}E_{24}E_{55}E_{66} - E_{11}E_{24}^2E_{33}E_{55}E_{66} - \\
& - E_{14}^2E_{22}E_{33}E_{55}E_{66} + 2E_{13}E_{14}E_{22}E_{43}E_{55}E_{66} + 2E_{11}E_{23}E_{24}E_{43}E_{55}E_{66} - \\
& - E_{11}E_{23}^2E_{44}E_{55}E_{66} - E_{13}^2E_{22}E_{44}E_{55}E_{66} + E_{11}E_{22}E_{33}E_{44}E_{55}E_{66} > 0.
\end{aligned}$$

Таблица 2. Количество слагаемых при вычислении главных миноров симметричной матрицы.

| Порядок минора | Общее количество слагаемых | Количество слагаемых с учетом подобных |
|----------------|----------------------------|----------------------------------------|
| 1              | 1                          | 1                                      |
| 2              | 2                          | 2                                      |
| 3              | 6                          | 5                                      |
| 4              | 24                         | 17                                     |
| 5              | 120                        | 73                                     |
| 6              | 720                        | 388                                    |

Для анизотропного микрополярного упругого тела [10, 14–16, 26] главный минор порядка 18 может быть представлен как сумма  $18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000$  слагаемых (т.е. примерно 6,4 квадриллиона слагаемых). После приведения подобных останется 1 844 908 072 865 290 или примерно 1,8 квадриллиона слагаемых.

**Заключение** В настоящем исследовании получены условия равновесия анизотропного упругого тела Гука. Подводя итог исследования, сформулируем следующие основные выводы:

- (1) Рассмотрена модель анизотропного линейного упругого тела Гука, характеризующаяся 21 определяющим механическим модулем.
- (2) С целью упрощения оперирования с квадратичной формой энергии деформации введены формальные переменные  $Y_1, \dots, Y_6$ .
- (3) Даны развернутые точные формы энергии деформации в парах  $[A]$ ,  $[Y]$  и  $[E]$ ,  $[Y]$ .
- (4) Установлена конгруэнтность определяющих матриц  $[A]$  и  $[E]$ .
- (5) С помощью системы символьных вычислений Wolfram Mathematica 14.1 вычислены главные миноры матрицы квадратичной формы. Сложность вычисления миноров матрицы  $[A]$  размерности  $6 \times 6$ , определяемая количеством слагаемых в итоговом выражении, приведена в Табл. 2. Миноры 5 и 6 после приведения подобных членов представлены как суммы 73 и 388 слагаемых, соответственно. Дальнейшее преобразование невозможно.
- (6) С помощью критерия Сильвестра установлены условия положительной определенности квадратичной энергетической формы.
- (7) Найдены ограничения на определяющие механические модули, обеспечивающие положительную определенность квадратичной формы энергии деформации и устойчивость равновесия анизотропного упругого тела Гука.

**ДОПОЛНИТЕЛЬНО**

**Вклад авторов.** Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124013000674-0).

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124013000674-0).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E. M. P., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: A. Hermann et fils, 1909. VI+226.
2. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383.
3. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // *Физика твердого тела*. 1960. Т. 2, № 7. С. 1399–1409.
4. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет «внутреннего» вращения // *Физика твердого тела*. 1960. Т. 5, № 9. С. 2591–2598.
5. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Континуальная теория асимметричной упругости. Равновесие изотропного тела // *Физика твердого тела*. 1960. Т. 6, № 9. С. 2689–2699.
6. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
7. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964*. Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5\_16.
8. Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / ed. by E. Kröner. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
9. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
10. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22, вып. 3. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.

11. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. 3(53). С. 86–100. DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
12. Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. ( Mechanics of generalized continua. Berlin: Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
13. Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore: Springer Verlag, 2017. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
14. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Диагонализация энергетической формы гемитропного тела и система определяющих неравенств. Метод отделения квадратов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2026. Т. 30, № 2. С. 288–307.
15. Мурашкин Е., Радаев Ю. Факторизация характеристического полинома энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. 1(67). С. 113–125. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.008.
16. Мурашкин Е., Радаев Ю. Факторизация характеристического полинома энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. 1(67). С. 159–179. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.021.
17. Wilkinson J. The algebraic eigenvalue problem. Т. 662. Oxford: Clarendon Press, 1965.
18. Johnson C., Horn R. Matrix analysis. Cambridge: Cambridge university press, 1985.
19. Бахвалов Н. Численные методы (анализ, алгебра, дифференциальные уравнения). Москва: Наука, 1975.
20. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
21. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. 4(54). С. 108–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
22. Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. 1(55). С. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
23. Krylova E. Y., Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultrasotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. United States, 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.
24. Nye J. F. Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices. Oxford: Clarendon Press, 1957. 322+xv.

25. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: наука, 1970. 720 с.
26. Радаев Ю., Мурашкин Е. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

## REFERENCES

1. Cosserat E. M. P., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: A. Hermann et fils, 1909. VI+226.
2. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383.
3. Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Basic Equations of the Theory of Elasticity of Media with Rotational Interaction of Particles // *Fizika Tverdogo Tela*. 1960. Т. 2, № 7. С. 1399–1409.
4. Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Continuum Theory of Asymmetric Elasticity. Account of “Internal” Rotation // *Fizika Tverdogo Tela*. 1960. Т. 5, № 9. С. 2591–2598.
5. Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Continuum Theory of Asymmetric Elasticity. Equilibrium of an Isotropic Body // *Fizika Tverdogo Tela*. 1960. Т. 6, № 9. С. 2689–2699.
6. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
7. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964*. Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5\_16.
8. Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / ed. by E. Kröner. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
9. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
10. Radayev Y. N. Multiplier Rule in Covariant Formulations of Micropolar Theories of Continuum Mechanics // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2018. Т. 22, вып. 3. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
11. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Two Basic Natural Forms of the Potential of Asymmetric Force-Stress and Couple-Stress Tensors in the Mechanics of Hemitropic Solids // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. 3(53). С. 86–100. DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
12. Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. ( *Mechanics of generalized continua*. Berlin: Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
13. Maugin G. A. *Non-classical continuum mechanics*. Singapore: Springer Verlag, 2017. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
14. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Diagonalization of the Energy Form of a Hemitropic Solid and a System of Constitutive Inequalities. Method of Completing Squares //

- Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2026. T. 30, № 2. С. 288–307.
15. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Factorization of the Characteristic Polynomial of the Energy Form of a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2026. 1(67). С. 113–125. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.008.
  16. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Factorization of the Characteristic Polynomial of the Energy Form of a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2026. 1(67). С. 159–179. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.021.
  17. Wilkinson J. The algebraic eigenvalue problem. T. 662. Oxford: Clarendon Press, 1965.
  18. Johnson C., Horn R. Matrix analysis. Cambridge: Cambridge university press, 1985.
  19. Bakhvalov N. S. Numerical Methods (Analysis, Algebra, Differential Equations). Moscow: Nauka, 1975.
  20. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Theory of Linear Hemitropic Micropolar Media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
  21. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Reduction of Natural Forms of Hemitropic Energy Potentials to Conventional Forms // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. 4(54). С. 108–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
  22. Murashkin E. V. On the Relation Between Micropolar Constitutive Parameters of Thermodynamic State Potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. 1(55). С. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
  23. Krylova E. Y., Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultrasotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. United States, 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.
  24. Nye J. F. Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices. Oxford: Clarendon Press, 1957. 322+xv.
  25. Korn G., Korn T. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Moscow: Nauka, 1970. 720 с.
  26. Radayev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor Formulation of the Mechanics of Hemitropic Micropolar Media // Problems of Strength and Plasticity. 2020. T. 82, № 4. С. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.