

В. В. Канду¹, А. И. Круссер^{2,3}, А. С. Шепелев², М. В. Шитикова²

АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

¹АО Атомэнергoproject, Москва, Россия

²Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

³Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В настоящем исследовании рассматривается задача о нелинейных вынужденных колебаниях пластины на вязкоупругом основании Пастернака на основе реологической модели Кельвина-Фойгта с производной дробного порядка. Анализ проводится для случаев внутренних резонансов два-к-одному и один-к-одному при их наложении на внешний резонанс. Для построения аналитического решения разрешающих нелинейных дифференциальных уравнений движения пластины используется обобщенный метод многих временных масштабов, согласно которому происходит разложение обобщенных перемещений в ряд по малому параметру с помощью новых временных масштабов. Далее при использовании программной реализации метода Рунге-Кутты четвертого порядка получено численное решение уравнений для амплитуд и фаз колебаний с учетом начальных условий. В ходе численного анализа удалось выяснить, что параметры дробности окружающей среды и вязкоупругого основания оказывают ключевое влияние на демпфирующие процессы в системе. Дополнительно установлено, что учет параметров, характеризующих вязкоупругое основание, является обоснованным ввиду их значительного влияния на изменение амплитуд колебаний системы, что доказывает необходимость учета деформаций сдвига по модели Пастернака для корректного прогнозирования динамического отклика сложных механических систем.

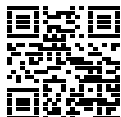
Ключевые слова: модель Кельвина-Фойгта с дробной производной, вынужденные нелинейные колебания пластины, вязкоупругое основание Пастернака, обобщенный метод многих временных масштабов

Канду Владимир Валерьевич, кандидат технических наук, начальник отдела по 3D моделированию; e-mail: kandu8vladimir@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-9083-5460>; AuthorID: 896076

Круссер Анастасия Игоревна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительных конструкций, оснований и фундаментов им. проф. Борисова Ю.М.; e-mail: an.krusser@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6203-2495>; AuthorID: 987211

Шепелев Антон Сергеевич, аспирант кафедры высшей математики; e-mail: anton.shepelev123@gmail.com; <https://orcid.org/0009-0007-8725-1636>; AuthorID: 1293433

Шитикова Марина Вячеславовна, доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой высшей математики; e-mail: marinavshitikova@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-2186-1881>; AuthorID: 4259



для цитирования: Канду В. В., Круссер А. И., Шепелев А. С., Шитикова М. В. Анализ вынужденных нелинейных колебаний пластин на вязкоупругом основании Пастернака на основе модели Кельвина-Фойгта с дробными производными // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 50–82. DOI: 10.37972/chgru.2026.68.2.005. EDN: PLIBHT

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

V. V. Kandu¹, A. I. Krusser^{2,3}, A. S. Shepelev², M. V. Shitikova²

ANALYSIS OF NONLINEAR VIBRATIONS OF PLATES ON A VISCOELASTIC PASTERNAK FOUNDATION USING THE FRACTIONAL DERIVATIVE KELVIN-VOIGT RHEOLOGICAL MODEL

¹*AO Atomenergoproekt, Russia*

²*National Research Moscow State University of Civil Engineering, Russia*

³*Voronezh State Technical University, Russia*

Abstract. In the present paper, the problem of nonlinear forced vibrations of a plate supported by a Pasternak viscoelastic foundation using the fractional derivative Kelvin-Voigt rheological model is investigated for the cases of two-to-one and one-to-one internal resonance accompanied by the external resonance. To construct an analytical solution to the resolving nonlinear differential equations of the plate's motion, a generalized method of multiple time scales is used, which involves expanding the generalized displacements into a series in terms of a small parameter via new time scales. Adopting a software implementation of the fourth-order Runge-Kutta method, a numerical solution is then obtained for the equations in terms of amplitudes and phases of nonlinear vibrations. The numerical analysis revealed that the fractional parameters of the environment and viscoelastic foundation have a key influence on the damping processes in the system. Additionally, it has been established that account for the parameters characterizing the viscoelastic foundation is justified due to their significant influence on the change in amplitudes of system's oscillations, which proves the need to take shear deformations into account according to the Pasternak model for the correct prediction of the dynamic response of complex mechanical systems.

Keywords: Kelvin-Voigt model with fractional derivative, forced nonlinear vibrations of a plate, viscoelastic Pasternak foundation, generalized method of multiple time scales

Vladimir V. Kandu, Candidate of Technical Sciences, Head of the Department of 3D Modelling; e-mail: kandu8vladimir@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-9083-5460>; AuthorID: 896076

Anastasia I. Krusser, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Building Structures, Foundations and Foundations named after Prof. Borisov Yu.M.; e-mail: an.krusser@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6203-2495>; AuthorID: 987211

Anton S. Shepelev, PhD student at the Department of Higher Mathematics; e-mail: anton.shepelev123@gmail.com; <https://orcid.org/0009-0007-8725-1636>; AuthorID: 1293433

Marina V. Shitikova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics; e-mail: marinavshitikova@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-2186-1881>; AuthorID: 4259



to cite this article: Kandu V. V., Krusser A. I., Shepelev A. S., Shitikova M. V. Analysis of nonlinear vibrations of plates on a viscoelastic Pasternak foundation using the fractional derivative Kelvin-Voigt rheological model // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 50–82. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.005

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Так как пластины являются универсальным конструктивным элементом, их применение в строительной, машиностроительной и авиакосмической областях весьма обширно: от возведения фундаментных плит до моделирования аэрокосмических конструкций. В связи с этим особую актуальность получили исследования динамического поведения пластин на вязкоупругом основании, реологические свойства которого описываются моделями с операторами дробного порядка [1–6], несомненным преимуществом использования которых является хорошее согласование результатов численного и аналитического моделирования с реальными экспериментальными данными, о чем свидетельствуют работы [7–10].

Операторы дробного порядка также нашли широкое применение благодаря их способности адекватно описывать память материала и наследственные свойства реальных грунтов [11–14]. В отличие от классических моделей вязкоупругости с целыми производными, требующих большого числа параметров для качественной аппроксимации экспериментальных данных, модели с производными дробного порядка позволяют достичь высокой точности за счет использования минимального количества констант.

Для описания вязкоупругого основания в современных исследованиях активно применяется двухпараметрическая модель Пастернака с дробными производными. Принципиальное преимущество данной модели по сравнению с классической моделью Фусса-Винклера заключается в учете сдвиговых характеристик, что существенно расширяет возможности анализа механического поведения конструкций. Данный подход успешно применяется к решению динамических задач различных строительных конструкций [15, 16]. Так, в работах [1, 17] было проведено моделирование плит на вязкоупругом основании Пастернака, которое продемонстрировало существенное влияние порядка дробности на прогиб, изгибающий момент и период затухания колебаний, особенно если в расчете учитывается протяженный период времени. Также были получены уравнения для случая упругой и вязкоупругой плиты с использованием модели Кельвина-Фойгта с дробной производной. Авторы отмечали, что данный подход может быть применен и для других конструктивных элементов, расположенных на основании Пастернака. Динамический анализ для упругой пластины, опирающейся на вязкоупругое основание Пастернака, проводился и в работе [2]. Отличительной чертой этого исследования стало наличие движущейся нагрузки, при этом оператор податливости основания был задан моделью стандартного линейного твердого тела.

В большинстве подобных исследований реологические свойства основания описываются в рамках модели Кельвина-Фойгта, определяющей поведение грунтов как для вязкоупругих твердых тел [18, 19]. Имеются также и альтернативные подходы, где сила демпфирования описывается моделью стандартного линейного твердого тела с дробной производной Римана-Лиувилля, например, как в [20], где авторы исследовали нелинейные колебания шарнирно-опертой

пластины на вязкоупругом основании Фусса-Винклера с приложением подвижной осциллирующей нагрузки. Изучаются также и различные типы граничных условий, например, в [1] рассматривалось взаимодействие шарнирно опертой пластины с основанием по модели Пастернака, свойства которого задавались при помощи модели Скотта-Блэра с дробной производной. Однако наиболее редкими являются исследования других типов опирания. В [21] рассматривались частоты нелинейных колебаний для трех различных типов граничных условий, а в [22] изучались комбинации простых граничных условий (защемленный край, шарнирное опирание и свободный край).

Важной особенностью является тот факт, что в процессе вынужденных нелинейных колебаний пластин возможно возникновение таких эффектов как внутренних и внешний резонансы, которые в случае наложения друг на друга могут привести к экстремальному состоянию конструкции. При этом внутренний резонанс, в отличие от внешнего, невозможно устранить путем регулирования частоты внешнего воздействия возбуждающей силы, что делает его изучение особенно важным для обеспечения надежности строительных конструкций.

Таким образом, в данной работе рассматривается задача о нелинейных вынужденных колебаниях пластины на вязкоупругом основании Пастернака на основе реологической модели Кельвина-Фойгта с дробной производной для случаев внутренних резонансов один-к-одному и два-к-одному, а также при их наложении на внешний резонанс. Отличительной особенностью от описанных выше исследований является описание динамического поведения пластины с помощью системы трех нелинейных уравнений относительно ее двух перемещений в плоскости и вертикального прогиба, для решения которых применяется обобщенный метод многих временных масштабов [23].

1. Постановка задачи. Свободные незатухающие и затухающие колебания прямоугольной пластины, описываемые тремя нелинейными дифференциальными уравнениями движения относительно перемещений в трех взаимно перпендикулярных направлениях, были исследованы в работе [24], где впервые было введено модальное демпфирование с дробной производной Римана-Лиувилля. Решение полученной системы уравнений было выполнено с использованием обобщенного метода многих временных масштабов, при этом рассматривался случай внутреннего резонанса 2:1. В последующей работе [25] на основе аналогичного подхода были проанализированы случаи внутреннего резонанса 1:1, а также различные типы внутренних комбинационных резонансов. Обобщение этого подхода на случай вынужденных колебаний от действия сосредоточенной гармонической силы было сделано в работе [26].

В статье [10] рассматривались нелинейные колебания пластины фон Кармана, взаимодействующей с вязкоупругой средой и опирающейся на вязкоупругое основание Пастернака. При этом динамика системы описывалась одним уравнением относительно поперечного прогиба.

В данной работе обобщим уравнения, приведенные в статье [26], за счет добавления вязкоупругого основания Пастернака. Для этого рассмотрим прямоугольную в плане и шарнирно опертую по контуру пластину со сторонами a и b , изображенную на рис. 1. Пластина расположена на вязкоупругом основании Пастернака и подвергается воздействию гармонической нагрузки $q = q(x, y, t)$, зависящей от координат x, y и времени t . Вязкоупругое основание Пастернака описывается при помощи модели Кельвина-Фойгта, в которой слагаемые, определяющие демпфирование, пропорциональны производной дробного порядка по времени от перемещений. Тогда нелинейные уравнения движения пластины относительно перемещений в трех взаимно перпендикулярных направлениях в размерном виде запишутся следующим образом:

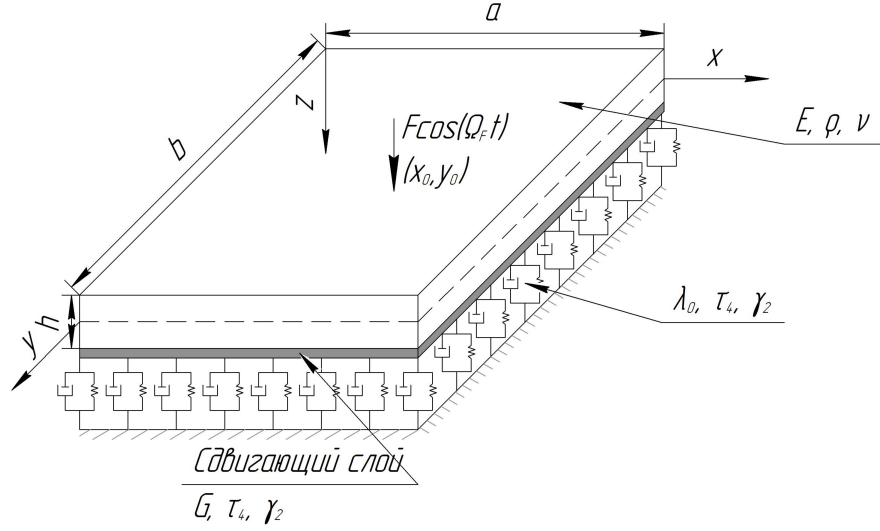


Рис. 1. Модель пластины на вязкоупругом основании Пастернака

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \\ = \rho \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1-\nu^2}{Eh} F_1, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \\ = \rho \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1-\nu^2}{Eh} F_2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \\
& - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \\
& = -\rho \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1-\nu^2}{Eh} (q - F_3 - F_4),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ и $w(x, y, t)$ — перемещения точек срединной поверхности пластины по направлению осей x, y, z соответственно; h — толщина пластины, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала пластины, E — модуль упругости, t — время, $q = F\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\cos\Omega_F t$ — внешняя нагрузка, F и Ω_F — амплитуда и частота внешней гармонической силы, $\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$ — дельта-функция Дирака, определяющая положение приложенной сосредоточенной силы.

В уравнениях (1)-(3) силы вязкоупругого сопротивления среды

$$F_1 = \alpha_1 D^{\gamma_1} u, \quad F_2 = \alpha_2 D^{\gamma_1} v, \quad F_3 = \alpha_3 D^{\gamma_1} w \tag{4}$$

описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной Римана-Лиувилля $D^\gamma x(t)$ порядка $\gamma_1 = \gamma$ ($0 < \gamma_1 \leq 1$)

$$D^\gamma x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(t-t')}{\Gamma(1-\gamma)t'^\gamma} dt', \tag{5}$$

где $\Gamma(1-\gamma)$ — гамма-функция, $\alpha_i = E_0 \tau_i^{\gamma_1}$ ($i = 1, 2, 3$) — коэффициенты демпфирования вязкоупругой среды, τ_i — времена ретардации вязкоупругой среды, а E_0 — релаксированное значение модуля упругости.

Для рассматриваемой модели Пастернака реакция вязкоупругого основания, реологические свойства которого задаются моделью Кельвина-Фойгта с производной дробного порядка $\gamma = \gamma_2$ ($0 < \gamma_2 \leq 1$), записывается в виде

$$F_4 = \lambda_0 (1 + \tau_4^{\gamma_2} D^{\gamma_2}) w - G (1 + \tau_4^{\gamma_2} D^{\gamma_2}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \tag{6}$$

где λ_0 — релаксированное значение коэффициента податливости основания, G — его модуль сдвига, а τ_4 — время ретардации вязкоупругого основания. При $\tau_4 \rightarrow 0$ модель (6) сводится к модели упругого основания Пастернака.

Начальные и граничные условия для шарнирно-опертой по контуру пластины имеют следующий вид:

при $t = 0$:

$$\begin{aligned}
& u(x, y, t)|_{t=0} = v(x, y, t)|_{t=0} = w(x, y, t)|_{t=0} = 0, \\
& \dot{u}|_{t=0} = \dot{v}|_{t=0} = \dot{w}|_{t=0} = 0;
\end{aligned} \tag{7}$$

при $x = 0$ и a :

$$\begin{aligned} w|_{x=0} = w|_{x=a} = 0, \quad v|_{x=0} = v|_{x=a} = 0, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=a} = 0, \quad w_{xx}|_{x=0} = w_{xx}|_{x=a} = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

при $y = 0$ и b :

$$\begin{aligned} w|_{y=0} = w|_{y=b} = 0, \quad u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0, \\ v_y|_{y=0} = v_y|_{y=b} = 0, \quad w_{yy}|_{y=0} = w_{yy}|_{y=b} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где точка над величинами означает производную по времени, а нижние индексы - производные по соответствующим координатам.

Для того чтобы привести уравнения движения, а также начальные и граничные условия к безразмерному виду, введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} u^* = \frac{u}{a}, \quad v^* = \frac{v}{a}, \quad w^* = \frac{w}{a}, \quad x^* = \frac{x}{a}, \quad y^* = \frac{y}{b}, \quad t^* = \frac{t}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \\ F^* = \frac{(1-\nu^2)}{Eh} F, \quad G^* = \frac{(1-\nu^2)}{E} G \frac{a^2}{h}, \quad \lambda_0^* = \frac{(1-\nu^2)}{E} \lambda_0 \frac{a^2}{h}. \end{aligned} \quad (10)$$

В дальнейшем для простоты изложения, звездочки у соответствующих безразмерных величин будут опущены.

Перепишем уравнения движения пластины (1)-(3), а также начальные и граничные условия (7)-(9) в безразмерном виде

$$\begin{aligned} u_{xx} + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 u_{yy} + \frac{1+\nu}{2} \beta_1 v_{xy} + w_x \left(w_{xx} + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 w_{yy} \right) + \frac{1+\nu}{2} \beta_1^2 w_y w_{xy} = \\ = \ddot{u} + \alpha_1 D^{\gamma_1} u, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \beta_1^2 v_{yy} + \frac{1-\nu}{2} v_{xx} + \frac{1+\nu}{2} \beta_1 u_{xy} + \beta_1 w_y \left(\beta_1^2 w_{yy} + \frac{1-\nu}{2} w_{xx} \right) + \frac{1+\nu}{2} \beta_1 w_x w_{xy} = \\ = \ddot{v} + \alpha_2 D^{\gamma_1} v, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta_2^2}{12} \left(w_{xxxx} + 2\beta_1^2 w_{xxyy} + \beta_1^4 w_{yyyy} \right) - \\ - w_{xx} (u_x + \nu \beta_1 v_y) - w_x (u_{xx} + \nu \beta_1 v_{xy}) - \\ - \frac{1-\nu}{2} \beta_1 \left[w_{xy} (\beta_1 u_y + v_x) + w_y (\beta_1 u_{xy} + v_{xx}) \right] - \\ - \beta_1^2 \left[w_{yy} (\nu u_x + \beta_1 v_y) + w_y (\nu u_{xy} + \beta_1 v_{yy}) \right] - \\ - \frac{1-\nu}{2} \beta_1 \left[w_{xy} (\beta_1 u_y + v_x) + w_x (\beta_1 u_{yy} + v_{xy}) \right] = \\ = -\ddot{w} + F \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \cos(\Omega_F t) - \\ - \alpha_3 D^{\gamma_1} w - \lambda_0 (1 + \tau_4^{\gamma_2} D^{\gamma_2}) w + G (1 + \tau_4^{\gamma_2} D_{0+}^{\gamma_2}) (w_{xx} + \beta_1^2 w_{yy}); \end{aligned} \quad (13)$$

при $t = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, y, t)|_{t=0} &= v(x, y, t)|_{t=0} = w(x, y, t)|_{t=0} = 0, \\ \dot{u}|_{t=0} &= \dot{v}|_{t=0} = \dot{w}|_{t=0} = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

при $x = 0$ и $x = 1$:

$$\begin{aligned} w|_{x=0} &= w|_{x=1} = 0, \quad v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0, \\ u_x|_{x=0} &= u_x|_{x=1} = 0, \quad w_{xx}|_{x=0} = w_{xx}|_{x=1} = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

при $y = 0$ и $y = 1$:

$$\begin{aligned} w|_{y=0} &= w|_{y=1} = 0, \quad u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0, \\ v_y|_{y=0} &= v_y|_{y=1} = 0, \quad w_{yy}|_{y=0} = w_{yy}|_{y=1} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\beta_1 = \frac{a}{b}$, $\beta_2 = \frac{h}{a}$ - коэффициенты, зависящие от размеров пластины a и b и её толщины h .

Решение трех нелинейных дифференциальных уравнений (11)–(13) будем искать в виде разложений по собственным формам колебаний шарнирно-опертой пластины:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{1mn}(t) \eta_{1mn}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{1mn}(t) \cos \pi m x \sin \pi n y, \quad (17)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{2mn}(t) \eta_{2mn}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{2mn}(t) \sin \pi m x \cos \pi n y, \quad (18)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{3mn}(t) \eta_{3mn}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{3mn}(t) \sin \pi m x \sin \pi n y, \quad (19)$$

где $x_{1mn}(t)$, $x_{2mn}(t)$, $x_{3mn}(t)$ — обобщенные перемещения, соответствующие перемещениям в плоскости пластины и её прогибу; m, n — число рассматриваемых полуволн (мод колебаний); $\eta_{1mn}(x, y)$, $\eta_{2mn}(x, y)$, $\eta_{3mn}(x, y)$ — собственные функции, удовлетворяющие граничным условиям (15) и (16).

Для определения собственных частот колебаний пластины необходимо решить задачу на собственные значения. Для этого рассмотрим линейные незатухающие собственные формы колебаний в плоскости и из плоскости пластины, следуя алгоритму из работ [24, 25, 27]:

$$-\ddot{x}_{1mn} \eta_{1mn} + x_{1mn} \left(\eta_{1mn,xx} + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 \eta_{1mn,yy} \right) + \frac{1+\nu}{2} \beta_1 \eta_{2mn,xy} x_{2mn} = 0, \quad (20)$$

$$-\ddot{x}_{2mn} \eta_{2mn} + x_{2mn} \left(\beta_1^2 \eta_{2mn,yy} + \frac{1-\nu}{2} \eta_{2mn,xx} \right) + \frac{1+\nu}{2} \beta_1 \eta_{1mn,xy} x_{1mn} = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{3mn} \eta_{3mn} &+ \frac{\beta_2^2}{12} (\eta_{3mn,xxx} + 2\beta_1^2 \eta_{3mn,xyy} + \beta_1^4 \eta_{3mn,yyy}) x_{3mn} + \\ &+ \lambda_0 x_{3mn} \eta_{3mn} - G (\eta_{3mn,xx} + \beta_1^2 \eta_{3mn,yy}) x_{3mn} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Для системы уравнений (20) и (21) характеристическое уравнение имеет вид

$$\omega_{mn}^4 - (S_{11}^{mn} + S_{22}^{mn})\omega_{mn}^2 + S_{11}^{mn}S_{22}^{mn} - S_{12}^{mn}S_{21}^{mn} = 0, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} S_{11}^{mn} &= \pi^2 \left(m^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_1^2 n^2 \right), \\ S_{12}^{mn} &= S_{21}^{mn} = \frac{1+\nu}{2} \beta_1 \pi^2 mn, \\ S_{22}^{mn} &= \pi^2 \left(\frac{1-\nu}{2} m^2 + \beta_1^2 n^2 \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Корнями характеристического уравнения (23) являются квадраты безразмерных собственных частот изгибных колебаний в плоскости пластины

$$\omega_{1mn}^2 = \pi^2 (m^2 + \beta_1^2 n^2), \quad \omega_{2mn}^2 = \frac{1-\nu}{2} \omega_{1mn}^2. \quad (25)$$

Из уравнения (22) получены собственные частоты изгибных колебаний из плоскости пластинки с учетом упругого основания Пастернака

$$\omega_{3mn}^2 = \frac{\pi^4 \beta_2^2}{12} (m^2 + \beta_1^2 n^2)^2 + \lambda_0 + G\pi^2 (m^2 + \beta_1^2 n^2) = \Omega_{3mn}^2 + \lambda_0 + G\pi^2 (m^2 + \beta_1^2 n^2), \quad (26)$$

где

$$\Omega_{3mn}^2 = \frac{\pi^4 \beta_2^2}{12} (m^2 + \beta_1^2 n^2)^2 \quad (27)$$

- квадрат частоты собственных вертикальных колебаний упругой пластинки без учета основания.

Заметим, что второе и третье слагаемые в соотношении (26) представляют собой добавочные члены от учета взаимодействия пластины с упругим основанием по модели Фусса-Винклера и Пастернака соответственно. Полагая $G = 0$, т.е. устремляя третье слагаемое к нулю, приходим к частоте вертикальных колебаний упругой пластины на упругом основании Фусса-Винклера

$$\omega_{3mn}^2 = \frac{\pi^4 \beta_2^2}{12} (m^2 + \beta_1^2 n^2)^2 + \lambda_0. \quad (28)$$

Подставляя (17)-(19) в уравнения (11)-(13), умножая (11)-(13) соответственно на η_{1kl} , η_{2kl} и η_{3kl} , интегрируя по x и y и используя условия ортогональности для линейных мод в пределах областей $0 \leq x, y \leq 1$, приходим к бесконечному числу систем, каждая из которых состоит из трех связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $x_{imn}(t)$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\ddot{x}_{amn} + \varkappa_\alpha D^{\gamma_1} x_{amn} + S_{\alpha\beta}^{mn} x_{\beta mn} = -F_{amn} \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_{3mn} + \varkappa_3 D^{\gamma_1} x_{3mn} + \omega_{3mn}^2 x_{3mn} + \lambda_0 \tau_4^{\gamma_2} D^{\gamma_2} x_{3mn} + \\ &+ G \tau_4^{\gamma_2} \pi^2 (m^2 + \beta_1^2 n^2) D^{\gamma_2} x_{3mn} = \\ &= -F_{3mn} + 4F \sin(\pi m x_0) \sin(\pi n y_0) \cos(\Omega_F t). \end{aligned} \quad (30)$$

При выводе уравнений (29) и (30) учитывалось фильтрующее свойство дельта-функции

$$\iint \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} F \cos(\Omega_F t) \iint \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \sin(\pi m x) \sin(\pi n y) dx dy = \\ = F \sin(\pi m x_0) \sin(\pi n y_0) \cos(\Omega_F t). \end{aligned} \quad (32)$$

Нелинейные части F_{imn} ($i = 1, 2, 3$) уравнений (29) и (30) имеют вид:

$$F_{1mn} = 4 \sum_{m_1} \sum_{n_1} \sum_{m_2} \sum_{n_2} x_{3m_1 n_1} x_{3m_2 n_2} A_{1mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2}, \quad (33)$$

$$F_{2mn} = 4 \sum_{m_1} \sum_{n_1} \sum_{m_2} \sum_{n_2} x_{3m_1 n_1} x_{3m_2 n_2} A_{2mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} F_{3mn} = -4 \sum_{m_1} \sum_{n_1} \sum_{m_2} \sum_{n_2} \left[x_{3m_1 n_1} x_{1m_2 n_2} C_{mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} + \right. \\ \left. + x_{3m_1 n_1} x_{2m_2 n_2} D_{mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2} \right], \end{aligned} \quad (35)$$

где коэффициенты $A_{1mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2}$, $A_{2mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2}$, $C_{mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2}$ и $D_{mn}^{m_1 n_1 m_2 n_2}$ зависят от комбинаций функций синуса и косинуса, входящих в собственные функции, определены в работе [25].

В силу того, что тензор второго ранга $S_{\alpha\beta}^{mn}$ является симметричным, он имеет два действительных собственных значения ω_{1mn} и ω_{2mn} , определенных в (25), которые соответствуют двум взаимно ортогональным собственным векторам

$$\begin{aligned} \bar{L}_{mn}^I \left\{ L_{1mn}^I = \frac{\pi m}{\omega_{1mn}}, \quad L_{2mn}^I = \frac{\pi \beta_1 n}{\omega_{1mn}} \right\}, \\ \bar{L}_{mn}^{II} \left\{ L_{1mn}^{II} = \frac{\pi \beta_1 n}{\omega_{1mn}}, \quad L_{2mn}^{II} = -\frac{\pi m}{\omega_{1mn}} \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

т.е.

$$L_{\alpha mn}^I L_{\alpha mn}^I = L_{\alpha mn}^{II} L_{\alpha mn}^{II} = 1, \quad L_{\alpha mn}^I L_{\alpha mn}^{II} = 0, \quad (37)$$

где суммирование выполнено по повторяющемуся индексу α , индексы m и n свободные.

Следуя работам [25, 28], матрицу $S_{\alpha\beta}^{mn}$ и обобщенные перемещения $x_{\alpha mn}$, входящие в уравнения (29) и (30), запишем в виде разложения по собственным векторам (36)

$$S_{\alpha\beta}^{mn} = \omega_{1mn}^2 L_{\alpha mn}^I L_{\beta mn}^I + \omega_{2mn}^2 L_{\alpha mn}^{II} L_{\beta mn}^{II}, \quad (38)$$

$$x_{\alpha mn} = X_{1mn} L_{\alpha mn}^I + X_{2mn} L_{\alpha mn}^{II}. \quad (39)$$

Подставляя (38) и (39) в уравнения (29) и (30) и затем умножая (29) на $L_{\alpha mn}^I$ и $L_{\alpha mn}^{II}$ с учетом (37), получаем

$$\ddot{X}_{1mn} + \varkappa_1 D^\gamma X_{1mn} + \omega_{1mn}^2 X_{1mn} = -F_{\alpha mn} L_{\alpha mn}^I, \quad (40)$$

$$\ddot{X}_{2mn} + \alpha_2 D^{\gamma_1} X_{2mn} + \omega_{2mn}^2 X_{2mn} = -F_{\alpha mn} L_{\alpha mn}^{II}, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{3mn} + \alpha_3 D^{\gamma_1} X_{3mn} + \omega_{3mn}^2 X_{3mn} + \lambda_0 \tau_4^{\gamma_2} D^{\gamma_2} X_{3mn} + \\ + G \tau_4^{\gamma_2} \pi^2 (m^2 + \beta_1^2 n^2) D^{\gamma_2} X_{3mn} = \\ = -F_{3mn} + 4F \sin(\pi m x_0) \sin(\pi n y_0) \cos(\Omega_F t), \end{aligned} \quad (42)$$

где $X_{3mn} = x_{3mn}$.

Отметим, что левые части уравнений (40)-(42) линейны и независимы друг от друга, при этом (40)-(42) связаны только с помощью нелинейных членов, стоящих в их правых частях.

При нелинейных колебаниях между взаимодействующими модами возможна перекачка энергии, поэтому следует исследовать явление внутреннего резонанса. С целью выявления возможности наступления внутреннего резонанса при нелинейных колебаниях пластинки, лежащей на вязкоупругом основании, и его последующего анализа будем полагать, что в процессе колебаний возбуждаются и доминируют только три собственных моды, соответствующие обобщенным перемещениям $X_{1s_1s_2}$, $X_{2l_1l_2}$ и $X_{3k_1k_2}$, с собственными частотами $\omega_{1s_1s_2}$, $\omega_{2l_1l_2}$ и $\omega_{3k_1k_2}$. В этом случае правые части уравнений (40)-(42) значительно упрощаются.

Опуская далее нижние индексы $s_1, s_2, l_1, l_2, k_1, k_2$ для простоты изложения, получим

$$\ddot{X}_1 + \alpha_1 D^{\gamma_1} X_1 + \omega_1^2 X_1 + \xi_1 X_3^2 = 0, \quad (43)$$

$$\ddot{X}_2 + \alpha_2 D^{\gamma_1} X_2 + \omega_2^2 X_2 + \xi_2 X_3^2 = 0, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \ddot{X}_3 + \alpha_3 D^{\gamma_1} X_3 + \omega_3^2 X_3 + X_3(\xi_{31} X_1 + \xi_{32} X_2) + \\ + \lambda_0 \tau_4^{\gamma_2} D^{\gamma_2} X_3 + G \tau_4^{\gamma_2} \pi^2 (m^2 + \beta_1^2 n^2) D^{\gamma_2} X_3 = \\ = 4F \sin(\pi m x_0) \sin(\pi n y_0) \cos(\Omega_F t), \end{aligned} \quad (45)$$

где коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \xi_{31}, \xi_{32}$ определяются через коэффициенты нелинейных членов (33)-(35) и собственные векторы (36). Эти коэффициенты не зависят от параметров основания Пастернака λ_0 и G , поскольку основание входит только в линейные члены уравнений движения. Таким образом, коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \xi_{31}, \xi_{32}$ полностью совпадают с соответствующими коэффициентами, полученными в работе [25] для случая пластины без основания.

2. Метод решения. Приближенное решение системы нелинейных уравнений (43)-(45) для малых, но конечных амплитуд, слабо изменяющихся с течение времени, можно получить аналитически с помощью обобщенного метода многих временных масштабов [23]. С этой целью разложим обобщенные перемещения пластины X_i ($i = 1, 2, 3$) в ряд по малому безразмерному параметру ε относительно новых временных масштабов $T_n = \varepsilon^n t$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$X_i = \varepsilon X_{i1}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 X_{i2}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^3 X_{i3}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots, \quad (46)$$

где $T_0 = t$ – быстрое время, характеризующее движения с собственными частотами линейных колебаний, $T_i = \varepsilon^i t$ – медленные времена, характеризующие модуляцию амплитуд и фаз нелинейных колебаний.

Тогда производные целого порядка по времени определяются следующим образом [29]:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (47)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots, \quad (48)$$

а разложение производных дробного порядка имеет вид [8]

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^\gamma &= (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)^\gamma = D_0^\gamma + \varepsilon \gamma D_0^{\gamma-1} D_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \gamma [(\gamma-1) D_0^{\gamma-2} D_1^2 + 2D_0^{\gamma-1} D_2] + \dots, \end{aligned} \quad (49)$$

где $D_n = \partial/\partial T_n$ ($n = 0, 1, 2$).

Профессор А.Х. Найфэ в своих знаменитых монографиях "Методы возмущений"[29] и "Нелинейные колебания"[30] подчеркивал, что при изучении вынужденных колебаний следует различать различные случаи в зависимости от того, является ли возбуждение (внешняя сила) «мягким» или «жестким», резонансным или нерезонансным. В его работах также показано, что при изучении внешнего резонанса «чтобы получить равномерно пригодное приближенное решение такой задачи, необходимо задать порядок малости возбуждения так, чтобы оно возникало при появлении демпфирования и нелинейности».

Так как мы исследуем наложение внешнего резонанса на внутренний резонанс с помощью метода разложения дробной производной по малому параметру, то необходимо учесть, что коэффициенты при силах демпфирования окружающей среды $\alpha_i = E_0 \tau_i^{\gamma_1} = \varepsilon^k \mu_i$ ($i = 1, 2, 3$) и вязкоупругого основания $\lambda_0 \tau_4^{\gamma_2} = \varepsilon^k \mu_4$, $G \tau_4^{\gamma_2} \pi^2 (m^2 + \beta_1^2 n^2) = \varepsilon^k \mu_5$, а также амплитуда внешней силы $\tilde{f} = \varepsilon_i^{k+1} f$ представлены в виде малых величин, для которых μ_i, f – конечные параметры, $k = 1$ или 2 , при этом $\tilde{f} = F \sin(\pi m x_0) \sin(\pi n y_0)$.

Заметим, что принятый порядок малости для внешних сил и сил демпфирования среды и основания согласуется с представлениями о внешнем резонансе [30]; а именно, ожидается, что в системе со слабым демпфированием возбуждение с малой амплитудой вызывает отклик с относительно большой амплитудой.

Подставляя соотношения (46)–(49) в уравнения (43)–(45) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε к нулю, получим при ε :

$$D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} = 0, \quad (50)$$

$$D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} = 0, \quad (51)$$

$$D_0^2 X_{31} + \omega_3^2 X_{31} = 0; \quad (52)$$

при ε^2 :

$$D_0^2 X_{12} + \omega_1^2 X_{12} = -2D_0 D_1 X_{11} - \xi_1 X_{31}^2 - \mu_1 (2 - \kappa) D_0^{\gamma_1} X_{11}, \quad (53)$$

$$D_0^2 X_{22} + \omega_2^2 X_{22} = -2D_0 D_1 X_{21} - \xi_2 X_{31}^2 - \mu_2(2 - \kappa) D_0^{\gamma_1} X_{21}, \quad (54)$$

$$D_0^2 X_{32} + \omega_3^2 X_{32} - 4f \cos(\Omega_F T_0) = -2D_0 D_1 X_{31} - \xi_{13} X_{11} X_{31} - \xi_{23} X_{21} X_{31} - \mu_3(2 - \kappa) D_0^{\gamma_1} X_{31} - \mu_4(2 - k) D_0^{\gamma_2} X_{31} - \mu_5(2 - k) D_0^{\gamma_2} X_{31}; \quad (55)$$

при ε^3 :

$$D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = -2D_0 D_1 X_{12} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) X_{11} - 2\xi_1 X_{31} X_{32} - \mu_1(2 - \kappa)(D_0^{\gamma_1} X_{12} + \gamma_1 D_0^{\gamma_1-1} D_1 X_{11}) - \mu_1(\kappa - 1) D_0^{\gamma_1} X_{11}, \quad (56)$$

$$D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = -2D_0 D_1 X_{22} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) X_{21} - 2\xi_2 X_{31} X_{32} - \mu_2(2 - \kappa)(D_0^{\gamma_1} X_{22} + \gamma_1 D_0^{\gamma_1-1} D_1 X_{21}) - \mu_2(\kappa - 1) D_0^{\gamma_1} X_{21}, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{33} + \omega_3^2 X_{33} - 4f \cos(\Omega_F T_0) = & -2D_0 D_1 X_{32} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) X_{31} - \\ & - \xi_{31}(X_{11} X_{32} + X_{12} X_{31}) - \xi_{32}(X_{21} X_{32} + X_{22} X_{31}) - \\ & - \mu_3(2 - k)(D_0^{\gamma_1} X_{32} + \gamma_1 D_0^{\gamma_1-1} D_1 X_{31}) - \\ & - \mu_3(k - 1) D_0^{\gamma_1} X_{31} - \\ & - \mu_4(2 - k)(D_0^{\gamma_2} X_{32} + \gamma_2 D_0^{\gamma_2-1} D_1 X_{31}) - \\ & - \mu_4(k - 1) D_0^{\gamma_2} X_{31} - \\ & - \mu_5(2 - k)(D_0^{\gamma_2} X_{32} + \gamma_2 D_0^{\gamma_2-1} D_1 X_{31}) - \\ & - \mu_5(k - 1) D_0^{\gamma_2} X_{31}. \end{aligned} \quad (58)$$

Решение уравнений (50)–(52) имеет вид

$$X_{j1} = A_j(T_1, T_2) \exp(i\omega_j T_0) + \bar{A}_j(T_1, T_2) \exp(-i\omega_j T_0), \quad (59)$$

где $A_j(T_1, T_2)$ ($j = 1, 2, 3$) — неизвестные комплексные функции, а $\bar{A}_j(T_1, T_2)$ — комплексно-сопряженные к $A_j(T_1, T_2)$.

Чтобы решить систему уравнений (53)–(58), необходимо определить действие дробной производной D_0^γ (5) на функции X_{j1} , для этого следует вычислить $D_0^\gamma e^{i\omega_j t}$. В работе [31] показано, что

$$D_0^\gamma e^{i\omega_j t} = (i\omega_j)^\gamma e^{i\omega_j t} + \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^\gamma}{u + i\omega_j} e^{-ut} du, \quad (60)$$

а далее в [32] было доказано, что второе слагаемое в соотношении (60) не влияет на решение, построенное методом многих временных масштабов в пределах первого и второго приближений. Таким образом, вместо точного определения (60) можно использовать соотношение

$$D_0^\gamma e^{i\omega_j t} = (i\omega_j)^\gamma e^{i\omega_j t}. \quad (61)$$

Далее будем определять порядок слабого демпфирования на каждом шаге.

2.1. Вязкость порядка ε . Положим в уравнениях (53)-(55) $k = 1$, т.е. рассмотрим вязкость порядка ε . Подставляя соотношения (59) в правую часть уравнений (53)-(55) с учетом соотношения (61), получим

$$D_0^2 X_{12} + \omega_1^2 X_{12} = -2i\omega_1 D_1 A_1(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) - \xi_1 [A_3^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + A_3 \bar{A}_3] - \mu_1 A_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} \exp(i\omega_1 T_0) + cc, \quad (62)$$

$$D_0^2 X_{22} + \omega_2^2 X_{22} = -2i\omega_2 D_1 A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) - \xi_2 [A_3^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + A_3 \bar{A}_3] - \mu_2 A_2 (i\omega_2)^{\gamma_1} \exp(i\omega_2 T_0) + cc, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{32} + \omega_3^2 X_{32} = & -2i\omega_3 D_1 A_3(T_1) \exp(i\omega_3 T_0) - \mu_3 A_3 (i\omega_3)^{\gamma_1} \exp(i\omega_3 T_0) - \\ & - \mu_4 A_3 (i\omega_3)^{\gamma_2} \exp(i\omega_3 T_0) - \mu_5 A_3 (i\omega_3)^{\gamma_2} \exp(i\omega_3 T_0) - \\ & - \xi_{13} \{A_1 A_3 \exp[i(\omega_1 + \omega_3)T_0] + A_1 \bar{A}_3 \exp[i(\omega_1 - \omega_3)T_0]\} - \\ & - \xi_{23} \{A_2 A_3 \exp[i(\omega_2 + \omega_3)T_0] + A_2 \bar{A}_3 \exp[i(\omega_2 - \omega_3)T_0]\} \\ & + 2f \exp(i\Omega_F T_0) + cc, \end{aligned} \quad (64)$$

где cc комплексно-сопряженная часть к предыдущим слагаемым.

Из полученных уравнений следует, что в данном случае возможно возникновение внутреннего резонанса 2:1 [24, 26, 28], который характеризуется тем, что одна из собственных частот колебаний в плоскости пластины в два раза больше собственной частоты вертикальных колебаний:

$$\omega_1 = 2\omega_3 \quad (\omega_1 \neq \omega_2, \omega_2 \neq 2\omega_3), \quad (65)$$

$$\omega_2 = 2\omega_3 \quad (\omega_1 \neq \omega_2, \omega_1 \neq 2\omega_3). \quad (66)$$

2.2. Вязкость порядка ε^2 . Рассмотрим теперь порядок вязкости ε^2 , положив в уравнениях (53)-(55) $k = 2$:

$$D_0^2 X_{12} + \omega_1^2 X_{12} = -2D_0 D_1 X_{11} - \xi_1 X_{31}^2, \quad (67)$$

$$D_0^2 X_{22} + \omega_2^2 X_{22} = -2D_0 D_1 X_{21} - \xi_2 X_{31}^2, \quad (68)$$

$$D_0^2 X_{32} + \omega_3^2 X_{32} = -2D_0 D_1 X_{31} - X_{31}(\xi_{13} X_{11} + \xi_{23} X_{21}) + 4f \cos(\Omega_F T_0). \quad (69)$$

Подставляя (59) в правые части уравнений (67)-(69), получим

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{12} + \omega_1^2 X_{12} = & -2i\omega_1 D_1 A_1(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) - \\ & - \xi_1 [A_3^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + A_3 \bar{A}_3] + cc, \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{22} + \omega_2^2 X_{22} = & -2i\omega_2 D_1 A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) - \\ & - \xi_2 [A_3^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + A_3 \bar{A}_3] + cc, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{32} + \omega_3^2 X_{32} = & -2i\omega_3 D_1 A_3(T_1) \exp(i\omega_3 T_0) - \\ & - \xi_{13} \{A_1 A_3 \exp[i(\omega_1 + \omega_3)T_0] + A_1 \bar{A}_3 \exp[i(\omega_1 - \omega_3)T_0]\} - \\ & - \xi_{23} \{A_2 A_3 \exp[i(\omega_2 + \omega_3)T_0] + A_2 \bar{A}_3 \exp[i(\omega_2 - \omega_3)T_0]\} + \\ & + 2f \exp(i\Omega_F T_0) + cc. \end{aligned} \quad (72)$$

Предположим, что собственные частоты ω_j ($j = 1, 2, 3$) имеют такие значения, что ни одна из комбинаций, приводящих к внутреннему резонансу (65) или (66), не может возникнуть. Тогда функции $\exp(\pm i\omega_j T_0)$, входящие в правую часть (70)–(72), порождают вековые члены.

Для устранения вековых членов в (70)–(72) необходимо обратить в нуль коэффициенты при $\exp(\pm i\omega_j T_0)$, то есть

$$D_1 A_j(T_1, T_2) = 0, \quad (73)$$

откуда следует, что A_j ($j = 1, 2, 3$) не зависят от T_1 .

Учитывая (73), решение уравнений (70)–(72) при $j = 1, 2, 3$ имеет вид

$$X_{12} = F_1(T_2) \exp(i\omega_1 T_0) + k_1 A_3^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + k_2 A_3 \bar{A}_3 + cc, \quad (74)$$

$$X_{22} = F_2(T_2) \exp(i\omega_2 T_0) + k_3 A_3^2 \exp(2i\omega_3 T_0) + k_4 A_3 \bar{A}_3 + cc, \quad (75)$$

$$\begin{aligned} X_{32} = & F_3(T_2) \exp(i\omega_3 T_0) + k_5 A_1 A_3 \exp[i(\omega_1 + \omega_3)T_0] + \\ & + k_6 A_2 A_3 \exp[i(\omega_2 + \omega_3)T_0] + \\ & + k_7 A_3 \bar{A}_1 \exp[i(\omega_3 - \omega_1)T_0] + \\ & + k_8 A_3 \bar{A}_2 \exp[i(\omega_3 - \omega_2)T_0] + cc, \end{aligned} \quad (76)$$

где $F_j(T_2)$ ($j = 1, 2, 3$) — новые функции, подлежащие определению, а коэффициенты k_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) имеют вид:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\xi_1}{4\omega_3^2 - \omega_1^2}, & k_2 &= -\frac{\xi_1}{\omega_1^2}, & k_3 &= \frac{\xi_2}{4\omega_3^2 - \omega_2^2}, \\ k_4 &= -\frac{\xi_2}{\omega_2^2}, & k_5 &= \frac{\xi_{13}}{\omega_1(\omega_1 + 2\omega_3)}, & k_6 &= \frac{\xi_{23}}{\omega_2(\omega_2 + 2\omega_3)}, \\ k_7 &= \frac{\xi_{13}}{\omega_1(\omega_1 - 2\omega_3)}, & k_8 &= \frac{\xi_{23}}{\omega_2(\omega_2 - 2\omega_3)}. \end{aligned} \quad (77)$$

Подставляя соотношения (59) и (74)–(76) с учетом (73) в уравнения (56)–(58) при $k = 2$, имеем

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = & -[2i\omega_1 D_2 A_1 + \mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} A_1 + 2\xi_1 (k_5 + k_7) A_1 A_3 \bar{A}_3] \\ & \cdot \exp(i\omega_1 T_0) - 2\xi_1 \{ F_3 A_3 \exp(2i\omega_3 T_0) + F_3 \bar{A}_3 + \\ & + k_5 A_1 A_3^2 \exp[i(\omega_1 + 2\omega_3)T_0] + \\ & + k_6 A_2 A_3^2 \exp[i(\omega_2 + 2\omega_3)T_0] + \\ & + (k_6 + k_8) A_2 A_3 \bar{A}_3 \exp(i\omega_2 T_0) + \\ & + k_7 A_1 A_3^2 \exp[i(2\omega_3 - \omega_1)T_0] + \\ & + k_8 A_3^2 \bar{A}_2 \exp[i(2\omega_3 - \omega_2)T_0] \} + cc, \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = & -[2i\omega_2 D_2 A_2 + \mu_2(i\omega_2)^{\gamma_1} A_2 + 2\xi_2(k_6 + k_8)A_2 A_3 \bar{A}_3] \\
& \cdot \exp(i\omega_2 T_0) - 2\xi_2\{F_3 A_3 \exp(2i\omega_3 T_0) + F_3 \bar{A}_3 + \\
& + k_5 A_1 A_3^2 \exp[i(\omega_1 + 2\omega_3)T_0] + \\
& + k_6 A_2 A_3^2 \exp[i(\omega_2 + 2\omega_3)T_0] + \\
& + (k_5 + k_7)A_1 A_3 \bar{A}_3 \exp(i\omega_1 T_0) + \\
& + k_7 A_1 A_3^2 \exp[i(2\omega_3 - \omega_1)T_0] + \\
& + k_8 A_3^2 \bar{A}_2 \exp[i(2\omega_3 - \omega_2)T_0]\} + cc,
\end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 X_{33} + \omega_3^2 X_{33} = & -[2i\omega_3 D_2 A_3 + \mu_3(i\omega_3)^{\gamma_1} A_3 + \\
& + \mu_4(i\omega_3)^{\gamma_2} A_3 + \mu_5(i\omega_3)^{\gamma_2} A_3 + \\
& + (\xi_{13}(k_1 + 2k_2) + \xi_{23}(k_3 + 2k_4))A_3^2 \bar{A}_3 + \\
& + \xi_{13}(k_5 + k_7)A_1 \bar{A}_1 A_3 + \xi_{23}(k_6 + k_8)A_2 \bar{A}_2 A_3] \\
& \cdot \exp(i\omega_3 T_0) - (\xi_{13}k_1 + \xi_{23}k_3)A_3^3 \exp(3i\omega_3 T_0) - \\
& - \xi_{13}\{(F_3 A_1 + F_1 A_3) \exp[i(\omega_3 + \omega_1)T_0] + \\
& + (A_3 F_1 + A_1 F_3) \exp[i(\omega_3 - \omega_1)T_0]\} - \\
& - \xi_{23}\{(F_3 A_2 + F_2 A_3) \exp[i(\omega_3 + \omega_2)T_0] + \\
& + (A_3 F_2 + A_2 F_3) \exp[i(\omega_3 - \omega_2)T_0]\} - \\
& - \xi_{13}\{k_5 A_1^2 A_3 \exp[i(2\omega_1 + \omega_3)T_0] + \\
& + k_7 A_1^2 A_3 \exp[i(2\omega_1 - \omega_3)T_0]\} - \\
& - \xi_{23}\{k_6 A_2^2 A_3 \exp[i(2\omega_2 + \omega_3)T_0] + \\
& + k_8 A_2^2 A_3 \exp[i(2\omega_2 - \omega_3)T_0]\} - \\
& - (\xi_{13}k_6 + \xi_{23}k_5)A_1 A_2 A_3 \exp[i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)T_0] - \\
& - (\xi_{13}k_6 + \xi_{23}k_7)A_1 A_2 A_3 \exp[i(\omega_2 + \omega_3 - \omega_1)T_0] - \\
& - (\xi_{13}k_8 + \xi_{23}k_5)A_1 A_2 A_3 \exp[i(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3)T_0] - \\
& - (\xi_{13}k_8 + \xi_{23}k_7)A_1 A_2 A_3 \exp[i(\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)T_0] - \\
& - (\xi_{13}k_1 + \xi_{23}k_3)A_3^3 \exp(3i\omega_3 T_0) + 2f \exp(i\Omega_F T_0) + cc.
\end{aligned} \tag{80}$$

Из анализа уравнений (78)–(80) следует, что на данном этапе может возникнуть внутренний резонанс 1:1, когда одна собственная частота равна другой собственной частоте

$$\omega_1 = \omega_2 \quad (\omega_3 \neq \omega_1, \omega_3 \neq \omega_2), \tag{81}$$

$$\omega_1 = \omega_3 \quad (\omega_2 \neq \omega_1, \omega_2 \neq \omega_3), \tag{82}$$

$$\omega_2 = \omega_3 \quad (\omega_1 \neq \omega_2, \omega_1 \neq \omega_3). \tag{83}$$

3. Резонанс два-к-одному. Рассмотрим случай сочетания внутреннего резонанса (65) с внешним резонансом, при этом предположим, что частота вертикальных колебаний равна частоте внешней возмущающей силы

$$\omega_3 = \Omega_F. \quad (84)$$

Устраняя вековые члены в уравнениях (62)-(64), получим уравнения для определения пока неизвестных функций $A_i(T_1)$:

$$2i\omega_1 D_1 A_1(T_1) + \xi_1 A_3^2 + \mu_1 A_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} = 0, \quad (85)$$

$$2i\omega_2 D_1 A_2(T_1) + \mu_2 A_2 (i\omega_2)^{\gamma_1} = 0, \quad (86)$$

$$2i\omega_3 D_1 A_3(T_1) + \mu_3 A_3 (i\omega_3)^{\gamma_1} + \mu_4 A_3 (i\omega_3)^{\gamma_2} + \mu_5 A_3 (i\omega_3)^{\gamma_2} + \xi_{13} A_1 \bar{A}_3 - 2f = 0. \quad (87)$$

Далее записывая функции $A_i(T_1)$ в полярном виде $A_i = a_i e^{i\varphi_i}$, где a_i и φ_i — функции амплитуд и фаз нелинейных колебаний, умножая уравнения (85)–(87) на комплексно-сопряженные функции, а также складывая и вычитая пары взаимно сопряженных уравнений, получаем следующие выражения для амплитуд и фаз колебаний системы «пластина + вязкоупругое основание + вязкоупругая окружающая среда»:

$$(a_1^2)^\cdot + s_1 a_1^2 + \omega_1^{-1} \xi_1 a_1 a_3^2 \sin \delta = 0, \quad (88)$$

$$(a_2^2)^\cdot + s_2 a_2^2 = 0, \quad (89)$$

$$(a_3^2)^\cdot + s_3 a_3^2 - \omega_3^{-1} \xi_{13} a_1 a_3^2 \sin \delta + 2f \omega_3^{-1} a_3 \sin \varphi_3 = 0, \quad (90)$$

$$\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \lambda_1 - \frac{1}{2} \xi_1 \omega_1^{-1} a_1^{-1} a_3^2 \cos \delta = 0, \quad (91)$$

$$\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \lambda_2 = 0, \quad (92)$$

$$\dot{\varphi}_3 - \frac{1}{2} \lambda_3 - \frac{1}{2} \xi_{13} \omega_3^{-1} a_1 \cos \delta + f \omega_3^{-1} a_3^{-1} \cos \varphi_3 = 0, \quad (93)$$

где $\delta = 2\varphi_3 - \varphi_1$ — разность фаз в случае внутреннего резонанса два-к-одному, точки означают дифференцирование по времени T_1 , а параметры $s_1, s_2, s_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ имеют вид

$$\begin{aligned} s_1 &= \mu_1 \omega_1^{\gamma_1-1} \sin(\psi_1), & s_2 &= \mu_2 \omega_2^{\gamma_1-1} \sin(\psi_1), \\ s_3 &= \mu_3 \omega_3^{\gamma_1-1} \sin(\psi_1) + (\mu_4 + \mu_5) \omega_3^{\gamma_2-1} \sin(\psi_2), \\ \lambda_1 &= \mu_1 \omega_1^{\gamma_1-1} \cos(\psi_1), & \lambda_2 &= \mu_2 \omega_2^{\gamma_1-1} \cos(\psi_1), \\ \lambda_3 &= \mu_3 \omega_3^{\gamma_1-1} \cos(\psi_1) + (\mu_4 + \mu_5) \omega_3^{\gamma_2-1} \cos(\psi_2), \\ \psi_1 &= 0.5\pi\gamma_1, & \psi_2 &= 0.5\pi\gamma_2. \end{aligned} \quad (94)$$

Из полученной системы уравнений (88)–(93) видно, что возникновение внутреннего резонанса 2:1 (65) приводит к перекачке энергии между взаимодействующими модами с частотами ω_1 и ω_3 , которая сопровождается амплитудно-фазовой модуляцией. Что касается третьей моды колебаний с частотой ω_2 , которая не задействована во внутреннем резонансе (65), то, как следует из уравнений (89) и (92), ее амплитуда $a_2 = a_{20} = \text{const}$ не зависит от времени T_1 , а

фаза меняется линейно во времени $\varphi = \frac{1}{2}\lambda_2 T_1 + \varphi_{20}$, где a_{20} и φ_{20} соответственно начальные амплитуда и фаза колебаний.

Система уравнений (88)-(93) и выражения (94) являются обобщением ряда классических моделей, которые могут быть получены как частные предельные случаи. Рассмотрим пять основных предельных переходов.

1. Если положить коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругого основания, равными нулю, т.е. $\mu_4 = \mu_5 = 0$, и не учитывать вклад основания на частоту ω_3 , т.е. вычислять ее по формуле (27), то получим уравнения вынужденных колебаний пластинки в вязкоупругой среде, демпфирующие свойства которой описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, в условиях внутреннего резонанса 2:1. Эта задача была рассмотрена в работе [26]. А если при этом $f = 0$, тогда приходим к случаю свободных колебаний, который был впервые исследован в работе [24].

2. В случае, когда параметры дробности $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, дробные производные переходят в обычные производные первого порядка. Следовательно, $\psi_1 = \psi_2 = 0.5\pi$, $\sin(\psi_1) = \sin(\psi_2) = 1$, а $\cos(\psi_1) = \cos(\psi_2) = 0$. Тогда выражения (94) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} s_1 &= \mu_1, & s_2 &= \mu_2, & s_3 &= \mu_3 + \mu_4 + \mu_5, \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned} \quad (95)$$

Из соотношений (95) видно, что коэффициенты демпфирования s_1, s_2, s_3 становятся постоянными и не зависящими от частот колебаний, а коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ обращаются в ноль, что соответствует классической модели Кельвина-Фойгта, но противоречит гипотезе модального демпфирования.

3. Модель вязкоупругого основания Пастернака переходит в классическую упругую модель основания Пастернака, если положить время ретардации материала основания равным $\tau_4 = 0$, что приводит к $\mu_4 = \mu_5 = 0$. Тогда уравнения (88)-(93) будут описывать нелинейные колебания пластины в вязкоупругой среде на упругом основании Пастернака. При этом частота ω_3 вычисляется по формуле (26), которая как раз и учитывает вклад упругого основания Пастернака, а коэффициенты (94) принимают вид

$$s_i = \mu_i \omega_i^{\gamma_i - 1} \sin(\psi_i), \quad \lambda_i = \mu_i \omega_i^{\gamma_i - 1} \cos(\psi_i), \quad (i = 1, 2, 3).$$

4. Модель вязкоупругого основания Пастернака переходит в вязкоупругую модель основания Фусса-Винклера, когда модуль сдвига $G = 0$, что приводит к $\mu_5 = 0$. В этом случае собственная частота изгибных колебаний из плоскости пластины вычисляется по формуле (28). Отметим, что если дополнительно положить $\tau_4 = 0$, то получим упругое основание Фусса-Винклера.

5. В случае, когда порядок дробной производной стремится к нулю, параметры дробности $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, выражения (94) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} s_1 &= s_2 = s_3 = 0, \\ \lambda_1 &= \mu_1 \omega_1^{-1}, \quad \lambda_2 = \mu_2 \omega_2^{-1}, \quad \lambda_3 = (\mu_3 + \mu_4 + \mu_5) \omega_3^{-1}, \end{aligned} \quad (96)$$

где коэффициенты $\mu_i = \varepsilon^{-1} E_0$ ($i = 1, 2, 3$), $\mu_4 = \varepsilon^{-1} \lambda_0$ и $\mu_5 = \varepsilon^{-1} G \pi^2 (m^2 + \beta_2^2 n^2)$ зависят только от упругих параметров системы.

Это означает, что колебания становятся незатухающими, поскольку диссипация энергии, связанная с вязкостью среды и основания, полностью исчезает. Это соответствует классической задаче о нелинейных колебаниях упругой пластины на упругом основании Пастернака, если $G \neq 0$, или на упругом основании Фусса-Винклера при $G = 0$.

4. Резонанс один-к-одному. Рассмотрим случай сочетания внутреннего резонанса (81), когда какие-либо две частоты колебаний в плоскости пластинки в направлениях x и y близки друг другу (что особенно часто наблюдается для квадратных пластинок), с внешним резонансом (84).

Устраняя вековые члены в уравнениях (74)-(76), получим

$$2i\omega_1 D_2 A_1 + \mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} A_1 + 2\xi_1 (k_5 + k_7) A_1 A_3 \bar{A}_3 + 2\xi_1 (k_6 + k_8) A_2 A_3 \bar{A}_3 = 0, \quad (97)$$

$$2i\omega_2 D_2 A_2 + \mu_2 (i\omega_2)^{\gamma_1} A_2 + 2\xi_2 (k_6 + k_8) A_2 A_3 \bar{A}_3 + 2\xi_2 (k_5 + k_7) A_1 A_3 \bar{A}_3 = 0, \quad (98)$$

$$\begin{aligned} & 2i\omega_3 D_2 A_3 + \mu_3 (i\omega_3)^{\gamma_1} A_3 + (\mu_4 + \mu_5) (i\omega_3)^{\gamma_2} A_3 + \\ & + [\xi_{13} (k_1 + 2k_2) + \xi_{23} (k_3 + 2k_4)] A_3^2 \bar{A}_3 + \\ & + \xi_{23} (k_6 + k_8) A_2 \bar{A}_2 A_3 + \xi_{13} (k_5 + k_7) A_1 \bar{A}_1 A_3 + \\ & + (\xi_{13} k_6 + \xi_{23} k_7) \bar{A}_1 A_2 A_3 + \\ & + (\xi_{13} k_8 + \xi_{23} k_5) A_1 \bar{A}_2 A_3 - 2f = 0. \end{aligned} \quad (99)$$

Умножая уравнения (95)–(98) на комплексно-сопряженные функции, а также складывая и вычитая пары взаимно сопряженных уравнений, как это было сделано в случае резонанса 2:1, получаем следующие выражения для амплитуд и фаз колебаний системы «пластина + вязкоупругое основание + вязкоупругая внешняя среда»:

$$(a_1^2)^{\cdot} + s_1 a_1^2 + 2\omega_1^{-1} \xi_1 (k_6 + k_8) a_1 a_2 a_3^2 \sin \delta = 0, \quad (100)$$

$$(a_2^2)^{\cdot} + s_2 a_2^2 - 2\omega_2^{-1} \xi_2 (k_5 + k_7) a_1 a_2 a_3^2 \sin \delta = 0, \quad (101)$$

$$(a_3^2)^{\cdot} + s_3 a_3^2 + 2f a_3 \omega_3^{-1} \sin \varphi_3 = 0, \quad (102)$$

$$\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \lambda_1 - \omega_1^{-1} \xi_1 (k_5 + k_7) a_3^2 - \omega_1^{-1} \xi_1 (k_6 + k_8) a_1^{-1} a_2 a_3^2 \cos \delta = 0, \quad (103)$$

$$\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \lambda_2 - \omega_2^{-1} \xi_2 (k_6 + k_8) a_3^2 - \omega_2^{-1} \xi_2 (k_5 + k_7) a_1 a_2^{-1} a_3^2 \cos \delta = 0, \quad (104)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\varphi}_3 - \frac{1}{2} \lambda_3 - \frac{1}{2} \omega_3^{-1} [\xi_{13} (k_1 + 2k_2) + \xi_{23} (k_3 + 2k_4)] a_3^2 - \\ & - \frac{1}{2} \xi_{23} \omega_3^{-1} (k_6 + k_8) a_2^2 - \frac{1}{2} \xi_{13} \omega_3^{-1} (k_5 + k_7) a_1^2 - \\ & + f (\omega_3 a_3)^{-1} \cos \varphi_3 = 0, \end{aligned} \quad (105)$$

где $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ — разность фаз в случае внутреннего резонанса один-к-одному, точки означают дифференцирование по времени T_2 , а коэффициенты $s_1, s_2, s_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ определяются формулами (94).

Из уравнения (102) следует, что амплитуда вертикальных колебаний с течением времени зависит только от амплитуды внешней гармонической силы f и от фазы вертикальных колебаний $\varphi_3 = \varphi_3(T_2)$:

$$a_3 = a_{30}e^{-s_3 T_2/2} - \frac{f}{2\omega_3} \int_0^{T_2} \sin \varphi_3 dT_2. \quad (106)$$

Но поскольку фаза вертикальных колебаний, в свою очередь, зависит еще от квадратов амплитуд горизонтальных колебаний в соответствии с уравнением (105), то система шести уравнений (100)–(105) остается связанной.

Таким образом, структура уравнений (100)–(105), описывающих амплитудно-фазовую модуляцию при нелинейных вынужденных колебаниях в случае внутреннего резонанса 1:1 (81), существенно отличается от случая внутреннего резонанса 2:1 (65), поскольку все три моды a_1, a_2, a_3 оказываются связанными, несмотря на то, что во внутренний резонанс вступают только моды горизонтальных колебаний. Это приводит к следующим различиям в интерпретации предельных переходов.

1. Если положить коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругого основания, равными нулю, т.е. $\mu_4 = \mu_5 = 0$, и не учитывать вклад основания на частоту ω_3 , т.е. вычислять ее по формуле (27), то получим уравнения вынужденных колебаний пластинки в вязкоупругой среде, демпфирующие свойства которой описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, в условиях внутреннего резонанса 1:1. Эта задача была рассмотрена в работах [27, 33]. А если при этом $f = 0$, тогда приходим к случаю свободных колебаний, который был впервые исследован в работе [25].

2. При $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ (переход к классической модели Кельвина-Фойгта) система уравнений (100)–(105) сводится к системе шести связанных нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами демпфирования, не зависящими от частот колебаний, которые опеределаются соотношениями (95).

3. Как уже отмечалось для случая внутреннего резонанса 2:1, модель вязкоупругого основания Пастернака переходит в классическую упругую модель основания Пастернака, если положить время ретардации материала основания равным $\tau_4 = 0$, что приводит к $\mu_4 = \mu_5 = 0$. Тогда уравнения (100)–(105) будут описывать нелинейные колебания пластины в вязкоупругой среде на упругом основании Пастернака. При этом частота ω_3 вычисляется по формуле (26), которая как раз и учитывает вклад упругого основания Пастернака.

4. При $G = 0$ (переход к вязкоупругому основанию Фусса-Винклера) изменение собственной частоты ω_3 влияет на все коэффициенты нелинейного взаимодействия k_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) через соотношения (77), что, в свою очередь, влияет на энергообмен между всеми тремя модами нелинейных колебаний.

5. При $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, т.е. в случае, когда коэффициенты определяются соотношениями (96): $s_i = 0$, $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$), колебания становятся незатухающими, поскольку диссипация энергии, связанная с вязкостью среды и основания, полностью исчезает. Это соответствует классической задаче о нелинейных колебаниях упругой пластины на упругом основании Пастернака, если $G \neq 0$, или Фусса-Винклера при $G = 0$. При этом наличие внутреннего резонанса 1:1 (81) приводит к перекачке энергии между всеми тремя модами.

5. Численные результаты. Полученную систему уравнений относительно амплитуд и фаз нелинейных колебаний (88)–(93) для резонанса 2:1 можно решить численно при помощи алгоритма Рунге-Кутты четвертого порядка. С целью реализации данного метода был составлен программный код в системе для математических вычислений «GNU Octave», позволяющий получать графические результаты для безразмерных амплитуд a_1 , a_3 (рис. 2–4).

Для численных исследований использовались следующие геометрические и физические параметры пластины: $\omega_1 = 2\omega_3 = 14.285\pi$, $\nu = 0.27$, $\xi_1 = 50$, $\xi_{13} = 50$, $\beta_1 = 4.75$, $\beta_2 = 0.039$, а также начальные условия $a_{10} = 1$, $a_{20} = 0$, $a_{30} = 1$.

Зависимости безразмерных амплитуд колебаний от времени T_1 приведены для свободных колебаний при $f = 0$ на рис. 2 для различных значений параметров дробности γ_1, γ_2 , характеризующих вязкоупругую среду и вязкоупругое основание в диапазоне $0 \leq \gamma_{1,2} \leq 1$, включая незатухающие колебания при $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ на рис. 2, (a). Рисунки 2 иллюстрируют затухающий характер энергообмена между взаимодействующими подсистемами при различных значениях параметров дробности, при этом наличие вязкоупругого основания приводит к более интенсивному затуханию колебаний по сравнению с влиянием вязкоупругой окружающей среды рис. 2, (b). Увеличение параметров дробности приводит к более быстрому затуханию безразмерных амплитуд колебаний с течением времени, что характерно и для колебаний пластинки в вязкоупругой среде на упругом основании при $\gamma_2 = 0$ рис. 2, (c), и в случае колебаний упругой пластинки на вязкоупругом основании при $\gamma_1 = 0$ рис. 2, (d).

На рис. 3 представлены для сравнения результаты расчетов для случаев свободных колебаний при $f = 0$ рис. 3, (a), (b) и вынужденных колебаний рис. 3, (c), (d) при $f = 2$ для фиксированных значений параметров вязкоупругого основания μ_4 и μ_5 . Из рисунков 3 прослеживается влияние учета деформаций сдвига по вязкоупругой модели Пастернака ($\mu_5 \neq 0$) для корректного прогнозирования динамического отклика. В случае свободных колебаний рис. 3, (a), (b) затухание амплитуд происходит более интенсивно, тогда как при вынужденных колебаниях рис. 3, (c), (d) внешняя гармоническая сила оказывает стабилизирующее действие на колебательный процесс, препятствуя его быстрому затуханию. При этом предельный переход при $\mu_4 = \mu_5 = 0$ сводит задачу к случаю колебаний пластины на упругом основании в вязкоупругой среде без учёта основания, тогда как условие $\mu_5 = 0$, соответствует модели основания Фусса-Винклера, что продемонстрировано на рисунке 3, (b), (d).

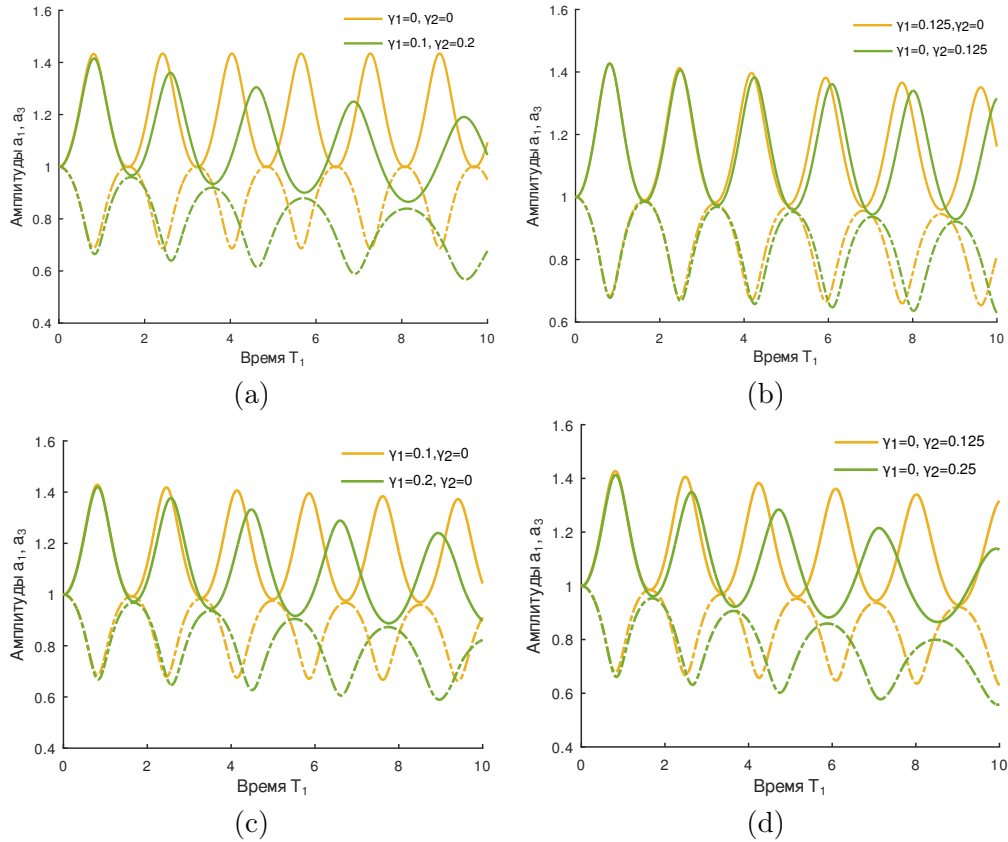


Рис. 2. Зависимость безразмерных амплитуд свободных колебаний a_1, a_3 от безразмерного времени T_1 при различных значениях параметров дробности γ_1 и γ_2 , где a_1 — пунктирная линия, a_3 — сплошная линия

В случае вынужденных колебаний, представленных на рис. 4 при различных амплитудах внешнего воздействия f , так же как и в случае свободных колебаний, параметры дробности γ_1 и γ_2 оказывают ключевое влияние на демпфирующие процессы системы «пластина + основание + среда». Возрастание амплитуды внешней возмущающей силы рис. 4, (a) при $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ приводит к увеличению периода энергообмена между взаимодействующими модами колебаний. На рис. 4, (b) при $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.2$ интенсивность процесса затухания колебаний при увеличении значения f возрастает, что свидетельствует о вкладе вязкоупругих свойств основания в энергообмен между взаимодействующими подсистемами.

Результаты проведенного в программном комплексе Octave численного анализа системы уравнений (100)–(105) при помощи алгоритма Рунге-Кутты четвертого порядка приведены на рис. 5, где показаны зависимости амплитуд колебаний от безразмерного времени T_2 для прямоугольной пластины, опирающейся на основание Пастернака в случае резонанса 1:1 при $\gamma_1 = 0.2, \gamma_2 = 0.3$. В

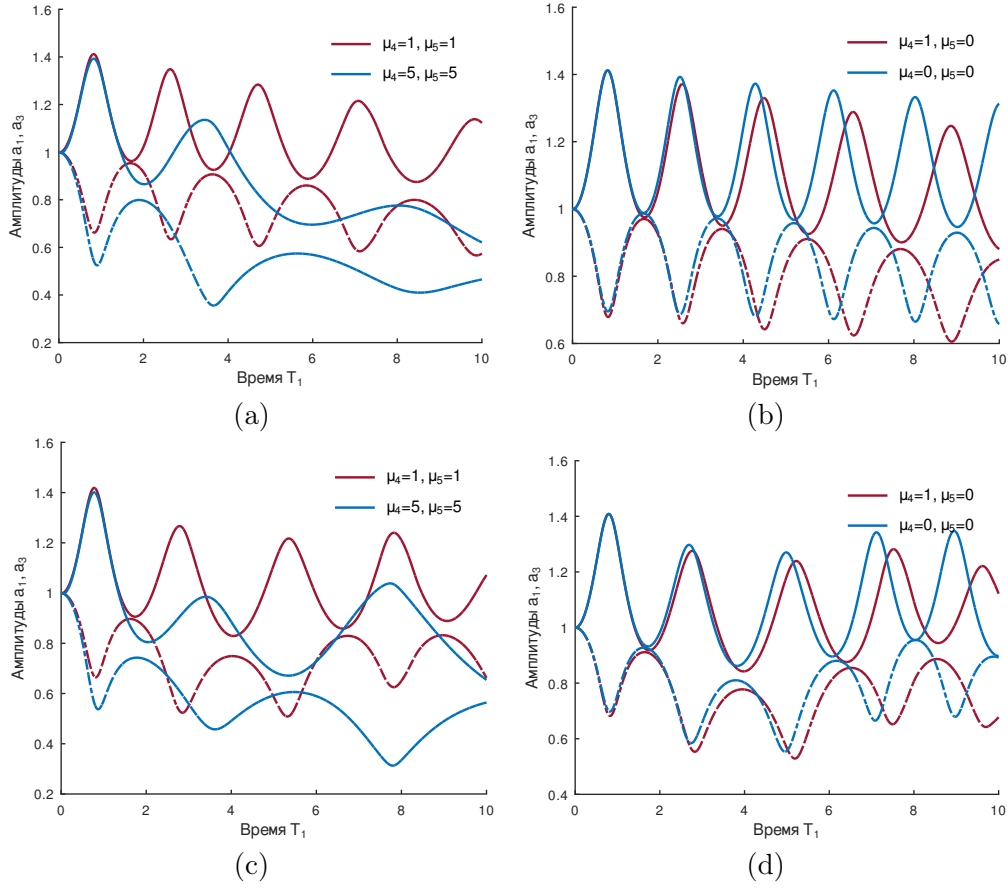


Рис. 3. Зависимость безразмерных амплитуд свободных (a), (b) и вынужденных (c), (d) колебаний a_1, a_3 от безразмерного времени T_1 при различных значениях μ_4, μ_5 и $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.2$, где a_1 — пунктирная линия, a_3 — сплошная линия

расчетах были приняты следующие параметры системы и начальные условия: $\omega_1 = \omega_2 = 3.08\pi$, $\omega_3 = 0.23\pi^2$, $\nu = 0.27$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0.08$, $m_1 = n_2 = m_3 = 1$, $n_1 = n_3 = 3$, $m_2 = 5$, $a_{10} = 0.5$, $a_{20} = 0.5$, $a_{30} = 0.5$. Изменение параметров μ_4, μ_5 позволяет управлять периодом колебательного процесса, что характерно как для свободных рис. 5, (a), так и для вынужденных колебаний рис. 5, (b). Перекачка энергии происходит между двумя подсистемами, при этом поведение третьей подсистемы изменяется под воздействием внешней гармонической силы рис. 5, (b).

Полученные численные результаты свидетельствуют о том, что наличие внешней гармонической силы с частотой, близкой к частоте вертикальных колебаний ω_3 , не оказывает сильного воздействия на характер поведения безразмерных амплитуд взаимодействующих мод колебаний в плоскости пластинки с частотами ω_1 и ω_2 , благодаря тому, что третья мода участвует не напрямую в

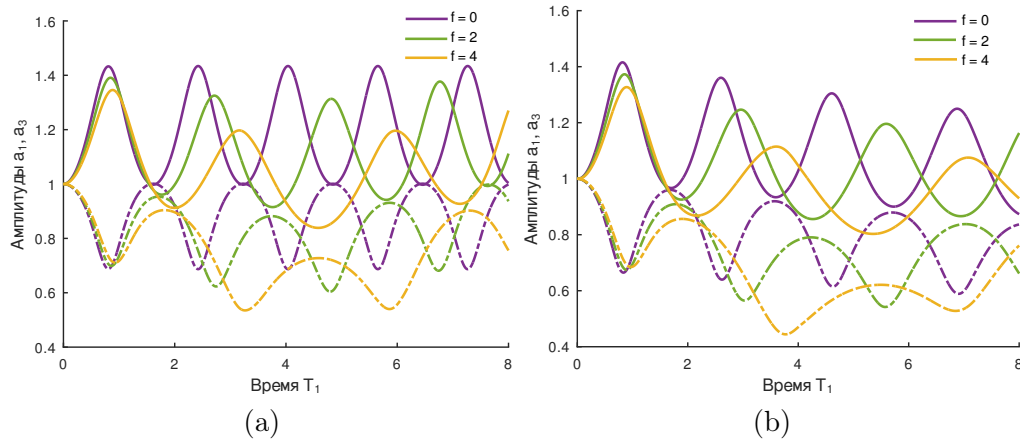


Рис. 4. Зависимость безразмерных амплитуд колебаний a_1, a_3 от безразмерного времени T_1 при различных значениях амплитуды внешней силы f : (a) — при $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$; (b) — при $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.2$, где a_1 — пунктирная линия, a_3 — сплошная линия

рассмотренном типе внутреннего резонанса (81), а опосредованно, через взаимозависимость уравнений (100)–(105). Однако внешнее воздействие меняет характер поведения динамического прогиба, приводя к увеличению амплитуды вертикальных колебаний рис. 5, (b).

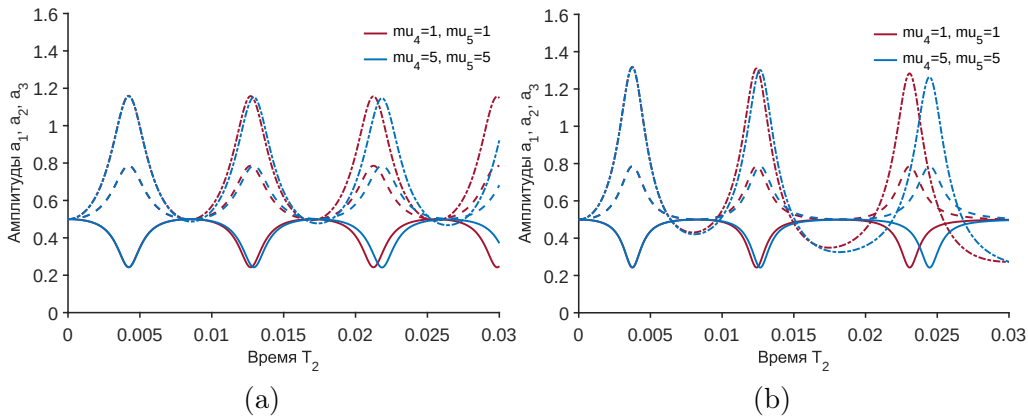


Рис. 5. Зависимость безразмерных амплитуд колебаний от безразмерного времени T_2 при различных значениях μ_4, μ_5 : (a) — свободные колебания; (b) — вынужденные колебания, где a_1 — пунктирная линия, a_2 — сплошная линия, a_3 — штрихпунктирная линия

Заключение. Решена задача о нелинейных колебаниях пластины на вязкоупругом основании Пастернака на основе реологической модели Кельвина-Фойгта с дробной производной для случаев свободных и вынужденных колебаний. Получено аналитическое решение разрешающих уравнений движения пластины в случае внутреннего резонанса 2:1 и 1:1 в сочетании с внешним резонансом при использовании обобщенного метода многих временных масштабов. Затем приведено численное решение уравнений амплитуд и фаз нелинейных колебаний методом Рунге-Кутты четвертого порядка с последующей графической визуализацией результатов.

Показано, что полученная система уравнений, описывающая нелинейные колебания пластинки, которая лежит на вязкоупругом основании Пастернака и колеблется в вязкоупругой среде, совпадает с точностью до коэффициентов, с уравнениями движения пластинки в трех взаимно перпендикулярных направлениях [26, 27, 33]. Варьирование коэффициентами позволяет рассмотреть различные типы оснований, а также незатухающие и затухающие свободные и вынужденные колебания пластинки как с учетом основания, так и без него.

Проведен анализ влияния параметров дробности и параметров вязкоупругого основания Пастернака на амплитудно-частотные характеристики и переходные режимы колебаний пластины в условиях внутреннего резонанса под действием внешней гармонической силы. Установлено, что уменьшение параметров дробности приводит к снижению демпфирующих свойств основания, тогда как при стремлении этих параметров к единице задача сводится к классической модели Кельвина-Фойгта целого порядка, что подтверждает корректность предложенного подхода.

Разработанный аналитико-численный алгоритм позволяет прогнозировать динамическое поведение пластин на вязкоупругих основаниях без громоздких численных алгоритмов на каждом временном шаге. Представленная модель позволяет рассматривать более частные случаи: вязкоупругое основание Фусса-Винклера, упругое основание Пастернака и Фусса-Винклера, а также вынужденные колебания упругой пластинки в вязкоупругой среде. Полученные закономерности могут быть использованы при проектировании фундаментных плит в сейсмоактивных зонах, виброизолирующих оснований, а также элементов дорожных полотен, подверженных динамическим нагрузкам.

В дальнейшей работе планируется исследование различных типов комбинационных внутренних резонансов, а также их наложение на внешний резонанс.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. В. В. Канду — аналитические выкладки; А. И. Круссер — анализ результатов, редактирование текста рукописи; А. С. Шепелев — численные исследования, написание текста рукописи; М. В. Шитикова — постановка задачи, общее руководство проектом, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Данная работа была поддержана грантом 2026 года на проведение фундаментальных научных исследований (НИР/НИОКР) научными коллективами НИУ МГСУ, проект № 06-482/130.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. V.V. Kandu — analytical treatment; A.I. Krusser — evaluation of results, editing the manuscript; A.S. Shepelev — numerical investigations, writing the draft manuscript; M.V. Shitikova — problem formulation, general supervision of the project, editing the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was supported by Moscow State Civil Engineering University in the framework of the fundamental research programm for 2026 year, Project No. 06-482/130.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cai W. Fractional modeling of Pasternak-type viscoelastic foundation // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2016. Vol. 21. P. 119–131. DOI: 10.1007/s11043-016-9321-0.
2. Shitikova M. V., Krusser A. I. Dynamic analysis of an elastic plate resting on a nonlinear fractional-order viscoelastic Pasternak foundation and subjected to moving load // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2022. Vol. 168. P. 13–24. DOI: 10.1007/978-3-030-91145-4_2.
3. Zhu H. H., Liu L., Ye X. Response of a loaded rectangular plate on fractional derivative viscoelastic foundation // *Journal of Basic Science and Engineering*. 2011. Vol. 19, no. 2. P. 271–278. DOI: 10.3969/j.issn.1005-0930.2011.02.011.
4. Zhang C. C., Zhu H. H., Shi B., Fatahi B. A long term evaluation of circular mat foundations on clay deposits using fractional derivatives // *Computers and Geotechnics*. 2018. Vol. 94. P. 72–82. DOI: 10.1016/j.compgeo.2017.08.018.
5. Praharaj R. K., Datta N. On the transient response of plates on fractionally damped viscoelastic foundation // *Computational and Applied Mathematics*. 2020. Vol. 39, no. 4. DOI: 10.1007/s40314-020-01285-6.
6. Шитикова М. В., Канду В. В. Анализ нелинейных колебаний упругой пластинки на вязкоупругом основании при наличии внутреннего резонанса один-к-одному // *Известия вузов. Строительство*. 2020. № 3. С. 5–22. DOI: 10.32683/0536-1052-2020-735-3-5-22.
7. Di Paola M. Visco-elastic behavior through fractional calculus: an easier method for best fitting experimental results // *Mechanics of Materials*. 2011. Vol. 43, no. 12. P. 799–806. DOI: 10.1016/j.mechmat.2011.08.016.
8. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges // *Journal of Engineering Mechanics*. 1998. Vol. 124. P. 1029–1036. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:9(1029).
9. Lai J., Mao S., Qiu J., et al. Investigation progresses and applications of fractional derivative model in geotechnical engineering // *Mathematical Problems in Engineering*. 2016. Vol. 2016. P. 9183296. DOI: 10.1155/2016/9183296.
10. Shitikova M. V., Kandu V. V., Krusser A. I. On nonlinear vibrations of an elastic plate on a fractional viscoelastic foundation in a viscoelastic medium in the presence of the one-to-one internal resonance // *Journal of Sound and Vibration*. 2023. Vol. 549. P. 117564. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.117564.

11. He M. M., Li N., Chen Y. S., Zhu C. H. Dynamic deformation behavior of rock based on fractional order calculus // *Yantu Gongcheng Xuebao/Chinese Journal of Geotechnical Engineering*. 2015. Vol. 37. P. 178–184. DOI: 10.11779/CJGE2015S1034.
12. Zhang Q., Zhang Q., Ji M. Dynamic Mechanical Properties of Soil Based on Fractional-Order Differential Theory // *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2019. Vol. 55, no. 6. P. 366–373. DOI: 10.1007/s11204-019-09550-5.
13. Song P., Wei P., Zhou X. Vibration of rectangular plate on fractional order viscoelastic foundation subjected to standing and moving loads // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2023. Vol. 28. P. 541–561. DOI: 10.1007/s11043-023-09590-3.
14. Tian D.-L., Zhou X.-P. The kinematic-constraint-inspired non-ordinary state-based peridynamics with fractional viscoelastic-viscoplastic constitutive model to simulating time-dependent deformation and failure of rocks // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2024. Vol. 406. P. 116873. DOI: 10.1016/j.cma.2024.116873.
15. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // *Applied Mechanics Reviews*. 1997. Vol. 50, no. 1. P. 15–67. DOI: 10.1115/1.3101682.
16. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results // *Applied Mechanics Reviews*. 2010. Vol. 63, no. 1. P. 1–52. DOI: 10.1115/1.4000563.
17. Kou L., Xu J., Wang B. Response for a Loaded Rectangular Plate on Viscoelastic Foundation with Fractional Derivative Model // *Proceedings of the GeoShanghai 2018 International Conference: Fundamentals of Soil Behaviors*. 2018. P. 166–176. DOI: 10.1007/978-981-13-0125-4_19.
18. Zatar W., Xiao F., Chen G. S., Hulsey J. L. Nonlinear vibration of a bridge with fractional-order viscoelastic constitutive relation // *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*. 2020. Vol. 40, no. 3. P. 1392–1400. DOI: 10.1177/1461348420979478.
19. Wang L., Sun D., Li P., Xie Y. Dynamic responses of plate on elastic foundation with fractional derivative model under moving load // *Computers and Geotechnics*. 2017. Vol. 83. P. 30–39. DOI: 10.1016/j.compgeo.2016.10.020.
20. Круссер А. И., Шитикова М. В. Численный анализ нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки на основе моделей с дробными производными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2022. Т. 26, № 4. С. 694–714. DOI: 10.14498/vsgtu1957.
21. Amabili M. Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions: Theory and experiments // *Computers and Structures*. 2004. Vol. 82, no. 31/32. P. 257–267. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.077.
22. Leissa A. *Vibration of Plates*. Washington, D.C.: Scientific, Technical Information Division, Office of Technology Utilization, NASA, 1969. 353 p.
23. Shitikova M. V. The fractional derivative expansion method in nonlinear dynamic analysis of structures // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 99. P. 109–122. DOI: 10.1007/s11071-019-05055-w.

24. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Free damped nonlinear vibrations of a viscoelastic plate under the two-to-one internal resonance // *Materials Science Forum*. 2003. Vol. 440/441. P. 29–36. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.440-441.29.
25. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V., Ngenzi J. C. A New Approach for Studying Nonlinear Dynamic Response of a Thin Plate with Internal Resonance in a Fractional Viscoelastic Medium // *Shock and Vibration*. 2015. Vol. 2015. P. 1–29. DOI: 10.1155/2015/795056.
26. Shitikova M. V., Rossikhin Y. A., Kandu V. Interaction of internal and external resonances during force driven vibrations of a nonlinear thin plate embedded into a fractional derivative medium // *Procedia Engineering*. Vol. 199. 2017. P. 832–837. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.006.
27. Шитикова М. В., Канду В. В. Численный анализ вынужденных колебаний нелинейных пластинок в вязкоупругой среде при наличии внутреннего резонанса один к одному // *Известия вузов. Строительство*. 2018. № 12. С. 9–22. DOI: 10.32683/0536-1052-2018-720-12-9-22.
28. Шитикова М. В., Осипова Е. И. Анализ вынужденных колебаний нелинейной вязкоупругой пластинки с учетом сдвига и инерции вращения // *Известия вузов. Строительство*. 2024. № 1. С. 15–29. DOI: 10.32683/0536-1052-2024-781-1-15-29.
29. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
30. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear Oscillations*. New York: Wiley, 1995. 704 p.
31. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. New approach for the analysis of damped vibrations of fractional oscillators // *Shock and Vibration*. 2009. Vol. 16, no. 4. P. 365–387. DOI: 10.3233/SAV-2009-0475.
32. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. On fallacies in the decision between the Caputo and Riemann-Liouville fractional derivatives for the analysis of the dynamic response of a nonlinear viscoelastic oscillator // *Mechanics Research Communications*. 2012. Vol. 45. P. 22–27. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2012.07.001.
33. Shitikova M. V., Kandu V. V. Force driven nonlinear vibrations of a thin plate with 1:1 internal resonance in a fractional viscoelastic medium // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 489. P. 012043. DOI: 10.1088/1757-899X/489/1/012043.

REFERENCES

1. Cai W. Fractional modeling of Pasternak-type viscoelastic foundation // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2016. Vol. 21. P. 119–131. DOI: 10.1007/s11043-016-9321-0.
2. Shitikova M. V., Krusser A. I. Dynamic analysis of an elastic plate resting on a nonlinear fractional-order viscoelastic Pasternak foundation and subjected to moving load // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2022. Vol. 168. P. 13–24. DOI: 10.1007/978-3-030-91145-4_2.
3. Zhu H. H., Liu L., Ye X. Response of a loaded rectangular plate on fractional derivative viscoelastic foundation // *Journal of Basic Science and Engineering*. 2011. Vol. 19, no. 2. P. 271–278. DOI: 10.3969/j.issn.1005-0930.2011.02.011.

4. Zhang C. C., Zhu H. H., Shi B., Fatahi B. A long term evaluation of circular mat foundations on clay deposits using fractional derivatives // *Computers and Geotechnics*. 2018. Vol. 94. P. 72–82. DOI: 10.1016/j.compgeo.2017.08.018.
5. Praharaj R. K., Datta N. On the transient response of plates on fractionally damped viscoelastic foundation // *Computational and Applied Mathematics*. 2020. Vol. 39, no. 4. DOI: 10.1007/s40314-020-01285-6.
6. Shitikova M. V., Kandu V. V. Analysis of nonlinear vibrations of an elastic plate on a viscoelastic foundation in the presence of one-to-one internal resonance // *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2020. No. 3. P. 5–22. DOI: 10.32683/0536-1052-2020-735-3-5-22. (in Russian).
7. Di Paola M. Visco-elastic behavior through fractional calculus: an easier method for best fitting experimental results // *Mechanics of Materials*. 2011. Vol. 43, no. 12. P. 799–806. DOI: 10.1016/j.mechmat.2011.08.016.
8. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges // *Journal of Engineering Mechanics*. 1998. Vol. 124. P. 1029–1036. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:9(1029).
9. Lai J., Mao S., Qiu J., et al. Investigation progresses and applications of fractional derivative model in geotechnical engineering // *Mathematical Problems in Engineering*. 2016. Vol. 2016. P. 9183296. DOI: 10.1155/2016/9183296.
10. Shitikova M. V., Kandu V. V., Krusser A. I. On nonlinear vibrations of an elastic plate on a fractional viscoelastic foundation in a viscoelastic medium in the presence of the one-to-one internal resonance // *Journal of Sound and Vibration*. 2023. Vol. 549. P. 117564. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.117564.
11. He M. M., Li N., Chen Y. S., Zhu C. H. Dynamic deformation behavior of rock based on fractional order calculus // *Yantu Gongcheng Xuebao/Chinese Journal of Geotechnical Engineering*. 2015. Vol. 37. P. 178–184. DOI: 10.11779/CJGE2015S1034.
12. Zhang Q., Zhang Q., Ji M. Dynamic Mechanical Properties of Soil Based on Fractional-Order Differential Theory // *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2019. Vol. 55, no. 6. P. 366–373. DOI: 10.1007/s11204-019-09550-5.
13. Song P., Wei P., Zhou X. Vibration of rectangular plate on fractional order viscoelastic foundation subjected to standing and moving loads // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2023. Vol. 28. P. 541–561. DOI: 10.1007/s11043-023-09590-3.
14. Tian D.-L., Zhou X.-P. The kinematic-constraint-inspired non-ordinary state-based peridynamics with fractional viscoelastic-viscoplastic constitutive model to simulating time-dependent deformation and failure of rocks // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2024. Vol. 406. P. 116873. DOI: 10.1016/j.cma.2024.116873.
15. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // *Applied Mechanics Reviews*. 1997. Vol. 50, no. 1. P. 15–67. DOI: 10.1115/1.3101682.
16. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results // *Applied Mechanics Reviews*. 2010. Vol. 63, no. 1. P. 1–52. DOI: 10.1115/1.4000563.

17. Kou L., Xu J., Wang B. Response for a Loaded Rectangular Plate on Viscoelastic Foundation with Fractional Derivative Model // *Proceedings of the GeoShanghai 2018 International Conference: Fundamentals of Soil Behaviors*. 2018. P. 166–176. DOI: 10.1007/978-981-13-0125-4_19.
18. Zatar W., Xiao F., Chen G. S., Hulsey J. L. Nonlinear vibration of a bridge with fractional-order viscoelastic constitutive relation // *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*. 2020. Vol. 40, no. 3. P. 1392–1400. DOI: 10.1177/1461348420979478.
19. Wang L., Sun D., Li P., Xie Y. Dynamic responses of plate on elastic foundation with fractional derivative model under moving load // *Computers and Geotechnics*. 2017. Vol. 83. P. 30–39. DOI: 10.1016/j.compgeo.2016.10.020.
20. Krusser A. I., Shitikova M. V. Numerical analysis of nonlinear vibrations of a plate on a viscoelastic foundation under a moving oscillating load based on models with fractional derivatives // *Vestnik of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 26, no. 4. P. 694–714. DOI: 10.14498/vsgtu1957. (in Russian).
21. Amabili M. Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions: Theory and experiments // *Computers and Structures*. 2004. Vol. 82, no. 31/32. P. 257–267. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.077.
22. Leissa A. *Vibration of Plates*. Washington, D.C.: Scientific, Technical Information Division, Office of Technology Utilization, NASA, 1969. 353 p.
23. Shitikova M. V. The fractional derivative expansion method in nonlinear dynamic analysis of structures // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 99. P. 109–122. DOI: 10.1007/s11071-019-05055-w.
24. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Free damped nonlinear vibrations of a viscoelastic plate under the two-to-one internal resonance // *Materials Science Forum*. 2003. Vol. 440/441. P. 29–36. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.440-441.29.
25. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V., Ngenzi J. C. A New Approach for Studying Nonlinear Dynamic Response of a Thin Plate with Internal Resonance in a Fractional Viscoelastic Medium // *Shock and Vibration*. 2015. Vol. 2015. P. 1–29. DOI: 10.1155/2015/795056.
26. Shitikova M. V., Rossikhin Y. A., Kandu V. Interaction of internal and external resonances during force driven vibrations of a nonlinear thin plate embedded into a fractional derivative medium // *Procedia Engineering*. Vol. 199. 2017. P. 832–837. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.006.
27. Shitikova M. V., Kandu V. V. Force driven nonlinear vibrations of a thin plate in one to one internal resonance in a fractional viscoelastic medium // *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2018. No. 12. P. 9–22. DOI: 10.32683/0536-1052-2018-720-12-9-22. (in Russian).
28. Shitikova M. V., Osipova E. I. Analysis of forced vibrations of a nonlinear viscoelastic plate taken into account of shear and rotational inertia // *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2024. No. 1. P. 15–29. DOI: 10.32683/0536-1052-2024-781-1-15-29. (in Russian).
29. Nayfeh A. H. *Perturbation Methods*. New York: Wiley, 1973. 455 p.
30. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear Oscillations*. New York: Wiley, 1995. 704 p.

31. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. New approach for the analysis of damped vibrations of fractional oscillators // Shock and Vibration. 2009. Vol. 16, no. 4. P. 365–387. DOI: 10.3233/SAV-2009-0475.
32. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. On fallacies in the decision between the Caputo and Riemann-Liouville fractional derivatives for the analysis of the dynamic response of a nonlinear viscoelastic oscillator // Mechanics Research Communications. 2012. Vol. 45. P. 22–27. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2012.07.001.
33. Shitikova M. V., Kandu V. V. Force driven nonlinear vibrations of a thin plate with 1:1 internal resonance in a fractional viscoelastic medium // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 489. P. 012043. DOI: 10.1088/1757-899X/489/1/012043.