

А. А. Адамов, И. Э. Келлер

БАЗОВЫЕ ИСПЫТАНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ ЭЛАСТОМЕРОВ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

Аннотация. Предложена программа базовых испытаний и методика идентификации модели вязкоупругого поведения слабосжимаемого гиперупругого материала, испытывающего конечные деформации при комнатной температуре. Рассмотрены три модели, использующие линейный наследственный оператор обобщенного тела Максвелла в сочетании с двухконстантной ашпроксимацией сдвиговой части упругого потенциала, в которых различным образом реализовано разложение движения на упругую и вязкоупругую части. Вязкоупругие константы находятся по данным испытаний на свободное сжатие цилиндрических образцов по программе деформирования с этапами нагружения с постоянной скоростью и релаксации, осуществляемые на жесткой электромеханической испытательной машине. Модуль объемного сжатия находится из испытания на стесненное сжатие по циклической программе с этапами нагружения постоянной скоростью, разгрузки и выдержки. Предложен алгоритм определения констант по данным испытаний, сводящий задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений. Предложенная методика применена к определению констант рассматриваемых моделей для высоконаполненной маслостойкой резины. Реализованы циклические испытания на свободное сжатие цилиндрических образцов с растущими уровнями деформации 10, 20 и 30% с двумя значениями скорости и выдержками при фиксированной деформации и в разгруженном состоянии в течение 900 с, а также на стесненное сжатие таких же образцов до напряжения 127 МПа с выдержками в течение 60 с. Модели, идентифицированные по части одного цикла, удовлетворительно предсказывают изменение напряжения при выполнении дальнейшей программы, а также при изменении скорости деформации. Для охвата большего диапазона деформаций предложенная программа реализована для испытания растяжением колец. Установлено не очень хорошее описание обратной релаксации, однако использование для идентификации моделей комбинированных данных испытаний не помогает исправить этот дефект, для чего требуется исправлять принципиальные дефекты рассматриваемых обобщений нелинейно-упругих моделей с помощью линейного вязкоупругого оператора.

Ключевые слова: вязкоупругость, гиперупругость, слабосжимаемые материалы, эластомеры, идентификация, испытания.

Адамов Анатолий Арсангалеевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник; e-mail: adamov@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6800-337X>; AuthorID: 2174

Келлер Илья Эрнстович, доктор физико-математических наук, заведующий лаборатории нелинейной механики деформируемого твердого тела; e-mail: kie@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9914-8870>; AuthorID: 11695



для цитирования: Адамов А. А., Келлер И. Э. Базовые испытания и идентификация модели вязкоупругого поведения эластомеров при конечных деформациях // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 83–103. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.006. EDN: OXNFHJ

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

A. A. Adamov, I. E. Keller

BASIC TESTS AND IDENTIFICATION OF A VISCOELASTIC MODEL OF ELASTOMERS UNDER FINITE DEFORMATIONS

Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russia

Abstract. A program of basic tests and a methodology for identifying a viscoelastic model of a slightly compressible hyperelastic material under finite deformations are proposed. The study focuses on elastomeric materials subjected to large strains at room temperature. Three model variants based on a linear hereditary operator of the generalized Maxwell body combined with a two-constant approximation of the deviatoric part of the strain energy potential are considered. The viscoelastic parameters are determined from free compression tests of cylindrical specimens with loading and relaxation stages. The bulk modulus is obtained from confined compression tests under cyclic loading. An identification algorithm reducing the problem to solving a system of linear algebraic equations is proposed. The approach is validated for oil-resistant rubber. The identified models adequately predict stress evolution under different loading programs and strain rates. Limitations in describing reverse relaxation are discussed.

Keywords: viscoelasticity, hyperelasticity, elastomers, finite deformations, identification, experiments

Anatoly A. Adamov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher; e-mail: adamov@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6800-337X>; AuthorID: 2174

Ilya E. Keller, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of Nonlinear Mechanics of Solids; e-mail: kie@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9914-8870>; AuthorID: 11695



to cite this article: Adamov A. A., Keller I. E. Basic Tests and Identification of a Viscoelastic Model of Elastomers under Finite Deformations // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 83–103. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.006

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Слабосжимаемые вязкоупругие тела широко распространены в природе и технике. Биологические ткани человека, полимерные защитно-упрочняющие покрытия оптического волокна, эластомеры в качестве материала амортизаторов, герметизирующих элементов, автомобильных шин, связующего пороховых композиций и многие другие материалы, важные в своих приложениях, делают востребованным их теоретическое описание и экспериментальные методы для калибровки моделей. Подобные модели и методы в рамках данной работы будут рассматриваться применительно к высоконаполненным маслостойким резинам, используемым в конструкции погружных нефтяных насосов для герметизации, работающим в условиях однократного нагружения и конечных деформаций при сжимающих средних напряжениях и постоянной температуре, однако интересует механическое поведение материала на длительных интервалах времени, то есть его вязкоупругие свойства. Поэтому ограничимся обзором нескольких важных теоретических и методических работ в этом контексте, не расширяя поле условий воздействий на исследуемый материал.

Описание различных моделей гиперупругих материалов, в том числе слабосжимаемых, для конечных деформаций можно найти, например, в [1–3] либо в мануалах любого пакета программ механики деформируемого твердого тела [4–7]. Простейший способ обобщения таких соотношений на вязкоупругое поведение состоит в “конструировании” обобщенного тела Максвелла путем добавления к равновесной упругой части тензора напряжений диссипативного слагаемого, которое записывается в виде линейной интегральной свертки функции деформаций с функцией релаксации, которая обычно берется в виде отрезка ряда Прони. Первым идею рассматривать вязкоупругие соотношения для малых деформаций в таком виде, по-видимому, высказал Ю.Н. Работнов в 1948 году [8, 9]. Для конечных деформаций подобная свертка выглядит вполне естественной и вытекает из требований корректности модели (независимости напряжений от наложенного жесткого движения). По-видимому, в рамках конечных деформаций один из вариантов таких соотношений вязкоупругости впервые записал Я.Ч. Фанг [10]. В зарубежной литературе за соответствующей моделью утвердилось данное самим автором название “квазилинейная вязкоупругость” (QLV), не представляющееся нам удачным, поскольку вязкоупругий оператор, действующий на функцию меры деформаций, является как раз линейным. Дальнейшее развитие модели выполнялось J.S. Simo и G.A. Holzapfel [11–13], и этот вариант соотношений численно реализован в пакетах ANSYS [5], COMSOL [6], ABAQUS [7], и (в качестве примера) использовался для описания вязкоупругих свойств мозга при ударном нагружении в [14]. Подобные уравнения предлагались и в [15] одним из авторов настоящей работы. L.M. Yang с соавторами [16] предложили квазилинейные соотношения с зависимостью ядра релаксации от деформированного состояния. Если в их соотношениях этой зависимостью пренебречь, модель все равно отличается от предыдущей принятой гипотезой о разложении движения. В качестве примера данная модель использовалась в работах [17, 18].

В пакете LS-DYNA [4] реализована еще одна модель в рамках другого разложения движения, в котором ядро релаксации сворачивается с логарифмической мерой деформаций. Более сложные, “многоконстантные”, теории, основой которых выступали более сложные структурные (реологические) схемы, например, предлагались А.В. Шутовым [19] и А.Л. Свистковым [20], но мы не предполагаем здесь описывать свойства резины за рамками оговоренных выше условий нагружения.

Вязкоупругие свойства макроскопических образцов при конечных деформациях обычно определяются из испытаний на свободное растяжение образцов в виде лопатки или кольца, свободного сжатия, двухосного растяжения оболочки и стесненного сжатия [15]. Нелинейность отклика при конечных деформациях не позволяет обходиться лишь данными DMA. Еще одним важным вопросом является конструирование программы испытаний, как для определения пригодности модели для описания ею данных испытаний, так и для надежного определения ее констант и валидации. Практически в каждой из цитированных выше работ этот вопрос так или иначе решался.

Далее в работе приводится формулировка упругого потенциала слабосжимаемого материала для конечных деформаций, содержащего две константы в его сдвиговой части и одну – в объемной. Выводятся соотношения, связывающие регистрируемые переменные в процессах свободного и стесненного сжатия в рамках соответствующей упругой модели. Приводятся формулировки трех обобщений рассматриваемого упругого закона с помощью линейного вязкоупругого оператора обобщенной модели Максвелла. Для каждой из моделей выводятся система линейных алгебраических уравнений метода наименьших квадратов для определения вязкоупругих констант модели и предлагается алгоритм для определения оставшихся констант. Описывается реализация предложенной программы испытаний на свободное сжатие цилиндрических образцов маслостойкой резины по циклическим программам деформирования с повышающимся уровнем деформации и выдержками при двух значениях скорости деформации. Предложено и реализовано альтернативное испытание растяжением колец, допускающего больший диапазон деформаций. Также описывается реализация второго базового испытания $\dot{\epsilon}$ на стесненное сжатие по программе с циклами нагружения и разгрузки с постоянной скоростью деформации и выдержками. Подобная методика испытания и идентификации модели была реализована недавно двумя из соавторов настоящей работы для порошкообразного парафина [21]. Выполняется идентификация по данным испытаний констант всех рассматриваемых вязкоупругих обобщений моделей гиперупругого слабосжимаемого материала, реализованных в популярных пакетах прикладных программ.

2. Соотношения при свободном и стесненном сжатии образца гиперупругого слабосжимаемого материала. Потенциал нелинейно-упругого слабосжимаемого материала выбирается в следующем виде

$$W = \Phi + U, \Phi = \frac{\mu}{2} \left((I_1 I_3^{-1/3} - 3) + b (I_1 I_3^{-1/3} - 3)^2 \right), U = \frac{K}{2} (I_3^{1/2} - 1)^2, \quad (1)$$

где $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$ – первый и третий инварианты меры деформации Коши – Грина. Данная форма упругого потенциала использовалась в обобщении на вязкоупругое поведение в [15]; также она включена в семейство полиномиальных упругих потенциалов и используется в обобщениях на вязкоупругое поведение в пакетах программ LS-DYNA (MAT_077_H) [4], ANSYS [5], COMSOL [6] и ABAQUS [7] (в которых приняты обозначения $c_{10} = \mu/2$, $c_{20} = \mu b/2$).

Для записи определяющих уравнений применительно к испытаниям на одноосное растяжение и сжатие далее будут использоваться запись тензоров напряжений в ортонормированном базисе их главных осей, а также кратности удлинений линейных материальных элементов вдоль этих осей $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Главные компоненты упругого тензора напряжений Коши имеют вид [2, 3, 22]

$$\sigma_i^e = 2\lambda_i^2 I_3^{-1/2} \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + 2I_3^{1/2} \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} + 2I_3^{1/2} \frac{\partial U}{\partial I_3}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Для (1) компоненты (2) с учетом выражений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} = \frac{\mu}{2} \left(I_3^{-1/3} + b(I_1 I_3^{-1/3} - 3) I_3^{-1/3} \right),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_3} = -\frac{\mu}{6} \left(I_1 I_3^{-4/3} + 2b(I_1 I_3^{-1/3} - 3) I_1 I_3^{-4/3} \right), \quad \frac{\partial U}{\partial I_3} = \frac{K}{2} (I_3^{1/2} - 1) I_3^{-1/2},$$

принимают вид

$$\sigma_3^e = \sigma_3^{es} + \sigma_{vol}, \quad \sigma_3^{es} = \mu I_3^{-5/6} \left(\lambda_3^2 - \frac{1}{3} I_1 \right) \left(1 + 2b(I_1 I_3^{-1/3} - 3) \right), \quad (3)$$

$$\sigma_{vol} = K (I_3^{1/2} - 1).$$

$$\sigma_{1,2}^e = \sigma_{1,2}^{es} + \sigma_{vol}, \quad \sigma_{1,2}^{es} = \mu I_3^{-5/6} \left(\lambda_{1,2}^2 - \frac{1}{3} I_1 \right) \left(1 + 2b(I_1 I_3^{-1/3} - 3) \right), \quad (4)$$

$$\sigma_{vol} = K (I_3^{1/2} - 1).$$

Связывая в испытаниях на свободное или стесненное сжатие координату 3 с осью сжатия, примем обозначения

$$\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda_T, \quad \lambda_3 \equiv \lambda, \quad \sigma_1^e = \sigma_2^e \equiv \sigma_T^e, \quad \sigma_1^{es} = \sigma_2^{es} \equiv \sigma_T^{es}, \quad (5)$$

$$\sigma_3^e \equiv \sigma^e, \quad \sigma_3^{es} \equiv \sigma^{es}.$$

В испытании на свободное сжатие

$$\sigma_T^e = 0; \quad (6)$$

при стесненном сжатии

$$\lambda_T = 1. \quad (7)$$

При свободном сжатии из (3), (4) следует

$$\sigma^e = \mu(\lambda^2 - \lambda_T^2)I_3^{-5/6} \left(1 + 2b(I_1 I_3^{-1/3} - 3)\right). \quad (8)$$

Для слабосжимаемого материала

$$I_3 = \lambda^2 \lambda_T^4 \approx 1 \quad (9)$$

и поэтому

$$\sigma^e = \mu \left(1 + 2b(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)\right) (\lambda^2 - \lambda^{-1}). \quad (10)$$

Для рассматриваемых испытаний в (3), (4) можно перейти к главным значениям тензора номинальных напряжений

$$n_i^e = \lambda_i^{-1} \sigma_i^e, \quad \Sigma i, \quad (11)$$

и далее – к следующему выражению для осевой главной компоненты этого тензора

$$n^e = \mu \left(1 + 2b(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)\right) (\lambda - \lambda^{-2}). \quad (12)$$

Эта компонента записывается испытательной машиной в протокол. Для обобщения гиперупругих соотношений на вязкоупругость обычно используется второй тензор Пиолы – Кирхгоффа, который определен в базисе отсчетной конфигурации и для которого существует одна объективная скорость, задаваемая оператором материальной производной. Главные компоненты этого тензора для рассматриваемых испытаний выражаются как

$$s_i^e = \sigma_i^e / \lambda_i^2, \quad \Sigma i, \quad (13)$$

и из (3), (4) для осевой главной компоненты следует

$$s^e = \mu \left(1 + 2b(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)\right) (1 - \lambda^{-3}). \quad (14)$$

В терминах перемещения траверсы $\Delta l \geq 0$ при сжатии образца кратность удлинения выражается в виде $\lambda = 1 - \Delta l / l_0 = 1 - \varepsilon$ (l_0 – начальная высота цилиндра-образца, а $-\varepsilon < 0$ – линейная деформация сжатия). В выражениях (10), (12), (14) можно учесть более точное выражение, чем (9),

$$\lambda_T^2 \approx \lambda^{-1} - \mu / K, \quad (15)$$

вытекающее из (4)-(6) при условии $\mu / K \ll 1$, характерном для слабосжимаемых материалов. В испытании резин на свободное сжатие $\mu / K \approx 0.001$, и в сравнении с $1/\lambda \approx 1 + \varepsilon$ при $\varepsilon < 0.3$ использование более точного выражения (13) при обработке эксперимента изменяет третью значащую цифру в выражении $\lambda^2 - \lambda_T^2$ в (8) и поэтому нецелесообразно.

При стесненном сжатии из (7) $I_3 = \lambda^2$, $I_1 = 2 + \lambda^2$, $I_3^{-5/6} = \lambda^{-5/3}$, поэтому (3) примет вид

$$\sigma = n = \frac{2\mu}{3} \lambda^{-5/3} (\lambda^2 - 1) \left(1 + 2b \left((2 + \lambda^2) \lambda^{-2/3} - 3\right)\right) + K(\lambda - 1). \quad (16)$$

В испытаниях на стесненное сжатие слабосжимаемых материалов линейная деформация ε обычно не превышает 0.05, а модуль объемного сжатия на три порядка превосходит линейный сдвиговой модуль, поэтому с точностью до третьей значащей цифры выражение (16) можно приближенно заменить на

$$\sigma = n = K(\lambda - 1). \quad (17)$$

3. Обобщения нелинейно-упругой модели с помощью линейного вязкоупругого оператора. Для обобщения гиперупругого поведения слабосжимаемого материала с учетом вязкоупругости сдвиговой составляющей напряжений вводится линейный оператор

$$R(f(t)) = \int_0^t R(t - \tau) df(\tau), \quad (18)$$

где $R(t)$ – функция релаксации, представляемая в виде

$$R(t) = \sum_{i=1}^n r_i \exp(-t/\tau_i) \quad (19)$$

где τ_i , $i = 1, \dots, n$ – времена релаксации, а r_i , $i = 1, \dots, n$ – положительные константы.

Поведение объемной составляющей будет полагаться упругим, и для определения его упругого модуля служит испытание на стесненное сжатие и соотношение (1.17). Сдвиговые свойства рассматриваемых ниже вязкоупругих обобщений гиперупругого слабосжимаемого материала определяются из испытаний на свободное сжатие.

Рассматриваемые обобщения отражают существование равновесного и диссипативного составляющих тензора напряжений. В первом обобщении оператор релаксации (1), (2) действует на упругую сдвиговую часть второго тензора напряжений Пиолы – Кирхгоффа и записывается для рассматриваемых здесь процессов с сохранением ориентации главных осей в этих осях следующим образом

$$s_i(t) = s_i^e(t) + R(s_i^e(t)) = s_i^e(t) + \int_0^t R(t - \tau) ds_i^{es}(\tau), \quad (20)$$

что приводит к выражению для осевой компоненты

$$s(t) = s^{es}(t) + R(s^{es}(t)) - \lambda^{-3} R(s_T^{es}(t)). \quad (21)$$

Деформированию однородного образца свободным сжатием с постоянной скоростью движения траверсы $l(t) = l_0 - v_0 t$ соответствует $\dot{\lambda} = -\dot{\varepsilon}_0 = -v_0/l_0$. Для

(1.12) с $b = 0$

$$n(t) = \mu(\lambda - \lambda^{-2}) + \mu\dot{\varepsilon}_0 \sum_{m=1}^n r_m \left(2\lambda \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_m}\right) \lambda^{-4}(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \lambda^{-2} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_m}\right) \lambda^2(\tau) d\tau \right), \quad \lambda(t) = 1 - \dot{\varepsilon}_0 t. \quad (22)$$

Следует заметить, что в (5) r_i , $i = 1, \dots, n$ — безразмерные константы. Соотношения вида (3) рассматривались многими авторами [10–15], и они реализованы в пакетах ANSYS [5], COMSOL [6] и ABAQUS [7]. В пакете ANSYS используются обозначения $c_{10} = \mu/(2\alpha_\infty)$, $c_{20} = \mu b/(2\alpha_\infty)$, $\alpha_i = \alpha_\infty r_i$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha_\infty = 1/(1 + \sum_{m=1}^n r_m)$. Можно показать, что значение секущего модуля $n/(\lambda - \lambda^{-2})$ при одноосном сжатии с конечной скоростью деформации приблизительно равно $\mu \left(1 + \sum_{m=1}^n r_m \frac{1 - \exp(-t_0/\tau_m)}{t_0/\tau_m} \right)$, зависит лишь от времени нагружения и лежит в интервале между значениями равновесного μ и мгновенного модулей $\mu (1 + \sum_{m=1}^n r_m)$ вязкоупругого тела.

Во втором обобщении оператор релаксации (1), (2) действует на тензор деформации Коши - Грина и записывается для рассматриваемых здесь процессов с сохранением ориентации главных осей в этих осях следующим образом

$$s_i(t) = s_i^e(t) + R(\tfrac{1}{2}\lambda_i^2(t)) = s_i^e(t) + \tfrac{1}{2} \int_0^t R(t - \tau) d\lambda_i^2(\tau), \quad (23)$$

что приводит к выражению для осевой компоненты

$$s(t) = s^{es}(t) + \tfrac{1}{2}R(\lambda^2(t)) - \tfrac{1}{2}\lambda^{-3}R(\lambda^{-1}(t)). \quad (24)$$

Деформированию однородного образца свободным сжатием с постоянной скоростью движения траверсы соответствует выражение

$$n(t) = \mu(1 + 2b(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3))(\lambda - \lambda^{-2}) + \\ + \dot{\varepsilon}_0 \sum_{m=1}^n r_m \left(\lambda \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_m}\right) \lambda(\tau) d\tau + \tfrac{1}{2}\lambda^{-2} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_m}\right) \lambda^{-2}(\tau) d\tau \right), \quad \lambda(t) = 1 - \dot{\varepsilon}_0 t. \quad (25)$$

Данная модель является частным случаем квазилинейных вязкоупругих соотношений с $r_i(I_1, I_2) \equiv r_i$, $i = 1, \dots, n$, предложенных L.M. Yang с соавторами [16] и использованных в [17, 18]. В исходной формулировке она предлагалась для несжимаемого тела.

Во третьем обобщении оператор релаксации (1), (2) действует на логарифмический тензор деформации и записывается для рассматриваемых здесь процессов с сохранением ориентации главных осей в этих осях следующим образом

$$\sigma_i(t) = \sigma_i^e(t) + 2R(\ln \lambda(t)) = \sigma_i^e(t) + 2 \int_0^t R(t - \tau) d \ln \lambda(\tau), \quad (26)$$

что приводит к выражению для осевой компоненты

$$\sigma(t) = \sigma^{es}(t) + 3R(\ln \lambda(t)). \quad (27)$$

Деформированию однородного образца свободным сжатием с постоянной скоростью движения траверсы соответствует выражение

$$\begin{aligned} n(t) &= \mu(1 + 2b(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3))(\lambda - \lambda^{-2}) + 3\dot{\epsilon}_0 \lambda \sum_{m=1}^n r_m \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_m}\right) \lambda^{-1}(\tau) d\tau, \\ \lambda(t) &= 1 - \dot{\epsilon}_0 t. \end{aligned} \quad (28)$$

Эта модель реализована в пакете LS-DYNA для семейства материалов MAT_077_H, где используются обозначения $c_{10} = \mu/2$, $c_{20} = \mu b/2$, $G_i = r_i$, $i = 1, \dots, n$ [4]. Следует отметить, что в двух последних моделях r_i , $i = 1, \dots, n$ – размерные константы. Для обеих значение текущего модуля $n/(\lambda - \lambda^{-2})$ при одноосном сжатии с конечной скоростью деформации приблизительно равно $\mu + \sum_{m=1}^n r_m \frac{1 - \exp(-t_0/\tau_m)}{t_0/\tau_m}$, зависит лишь от времени нагружения и лежит в интервале между значениями равновесного μ и мгновенного модулей $\mu + \sum_{m=1}^n r_m$ вязкоупругого тела.

4. Определение констант моделей по данным испытаний. Пусть известны значения номинального напряжения $n(t)$ в испытании на свободное сжатие образца по программе $\dot{\epsilon}(t) = \{\dot{\epsilon}_0, t \leq t_0; 0, t > t_0\}$ – нагружения с постоянной скоростью за время t_0 и релаксации в течение времени T . По этим данным оценивается равновесный модуль $\mu = -n_\infty/(\lambda_\infty - \lambda_\infty^{-2})$, где $n_\infty = n(t_0 + T)$ – значение номинального напряжения в конце периода релаксации, а $\lambda_\infty = 1 - \dot{\epsilon}_0 t_0$. Для рассматриваемого процесса спектр времен релаксации также можно выбрать из интервала $0 \leq \tau_i \leq T$, $i = 1, \dots, n$, из которых хотя бы одно должно быть $\tau_1 < t_0$. Тогда при известном равновесном модуле константы r_i , $i = 1, \dots, n$ и b для любой из рассматриваемых моделей входят в нее линейно, поэтому минимизация квадратичной невязки экспериментальных и теоретических напряжений в точках $0 \leq t_k \leq T$, $k = 1, \dots, K$ приведет к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ w \end{Bmatrix}, \quad (29)$$

где $\mathbf{r}^T = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$,

$$\begin{aligned} A_{mp} &= \sum_{k=1}^K q_m^k q_p^k, & a_p &= \sum_{k=1}^K q_0^k q_p^k, & a &= \sum_{k=1}^K q_0^k q_0^k, \\ w_p &= \sum_{k=1}^K \Delta_k q_p^k, & w &= \sum_{k=1}^K \Delta_k q_0^k, \end{aligned} \quad (30)$$

а q_m^k , q_0^k и Δ_k – выражения, которые в качестве примера для третьей модели записываются как

$$\begin{aligned}\Delta_k &= \frac{n_k}{\mu} + (\lambda_k - \lambda_k^{-2}), \quad q_0^k = -2(\lambda_k - \lambda_k^{-2})(\lambda_k^2 + 2\lambda_k^{-1} - 3), \\ q_m^k &= 3\lambda_k^{-1} \int_0^{t_k} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_m}\right) \lambda^{-1}(\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau, \quad k = 1, \dots, K, \\ \lambda(t) &= 1 - \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau\end{aligned}\tag{31}$$

В (31) в контексте данной работы для удобства принят положительный знак для сжимающих напряжений. Предлагаемая методика предполагает предварительный выбор спектра времен релаксации опытным путем. Необходимость изменения этого спектра возникает, если решение r_i , $i = 1, \dots, n$ существенно (более чем на порядок) различаются между собой. В том случае, если спектр времен релаксации выбран неудачно либо если модель принципиально не может описать свойства материала, в этом решении могут оказаться отрицательные элементы, чего нельзя допускать.

Реализация метода наименьших квадратов для обработки испытания на свободное сжатие в рамках аппроксимации (3.17) элементарна и в подробностях не рассматривается.

5. Экспериментальная часть. Испытания на свободное сжатие проведены на составных цилиндрических образцах высоконаполненной маслостойкой резины диаметром 20.08 мм и высотой 24.81-25.53 мм на универсальной машине Zwick Z100 с использованием специального приспособления с шаровым шарниром и ограничителями деформации до величины 0.3 (рис. 1). Для устранения трения по торцам образцов использовались 2 слоя пленки ПТФЭ 50 мкм со смазкой ЦИАТИМ-201Ф. Одна из программ включала ступень деформирования со скоростью деформации $\dot{\varepsilon}_0 = 0.03 \text{ с}^{-1}$ до максимальной линейной осевой деформации $\varepsilon_0 = 0.3$ с релаксацией напряжений при этой деформации в течении 900 с, полной разгрузкой и выдержкой при нулевой нагрузке в течение 900 с. Вторая программа включала три последовательных цикла деформирования со скоростью $\dot{\varepsilon}_0 = 0.01 \text{ с}^{-1}$ до уровней $\varepsilon_0 = 0.1, 0.2, 0.3$ и выдержками в течении 900 с при амплитудных значениях деформации и при разгрузках. На рис. 2 приведены программы изменения скорости деформации и деформации в этих программах, а на рис. 3 – результаты экспериментов в виде диаграмм на плоскости напряжение-деформация (обе переменные приняты с противоположным знаком) и напряжение-время.

Испытания на стесненное сжатие выполнялись на составных цилиндрических образцах диаметром 20.06 мм и высотой 17.84-18.54 мм, аналогичных испытанным на свободное сжатие. Использовано оригинальное приспособление для универсальной испытательной машины Zwick Z100 (рис. 4) — толстостенный полый цилиндр и плотно пригнанный входящий в него шток, установленное на

сферический центрирующий шарнир. Это приспособление позволяет получать надежные данные до величин осевых сжимающих напряжений 150 МПа. Программа состояла из трех повторяющихся циклов, состоящих из этапа нагружения до 127 МПа со скоростью деформации 0.001 с^{-1} , последующей выдержки в течение 60 с и разгрузки с той же скоростью. Результаты испытания двух образцов приведены на рис. 5 в виде диаграмм зависимости напряжения от линейной деформации. Диаграммы показывают ничтожную релаксацию, что позволяет считать объемное изменение упругим. О малости неупругих релаксационных процессов говорит узость (малая площадь) петель гистерезиса.

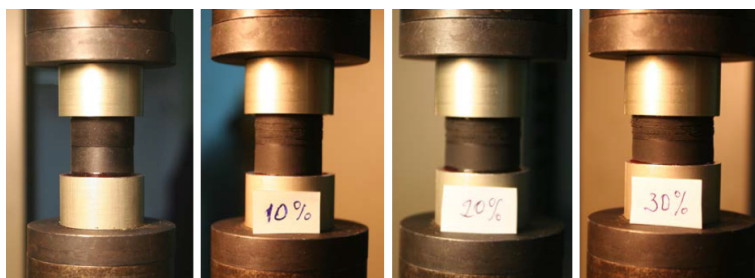


Рис. 1. Фото образца в испытании на свободное сжатие при линейной осевой деформации 0, 0.1, 0.2 и 0.3.

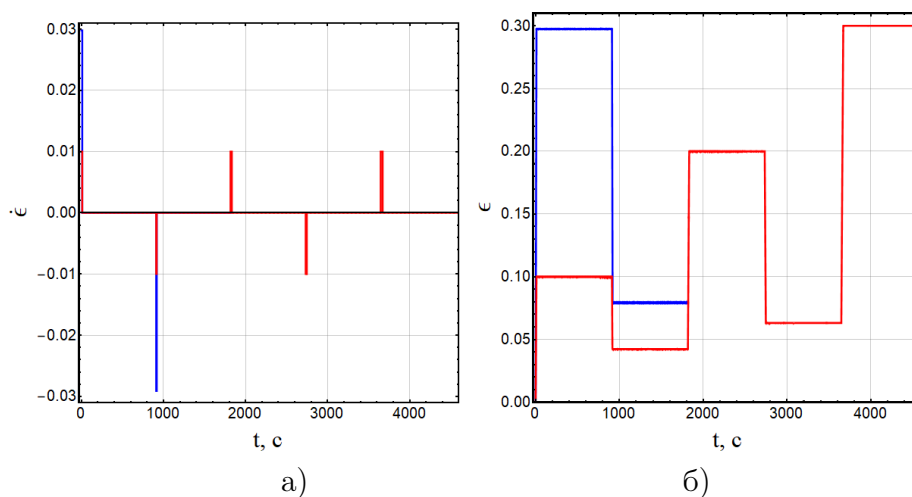


Рис. 2. Программы деформирования в испытании свободным сжатием образцов резины

6. Обработка данных испытаний. Из данных испытаний на свободное сжатие (рис. 3) представляют интерес напряжения в конце каждого этапа

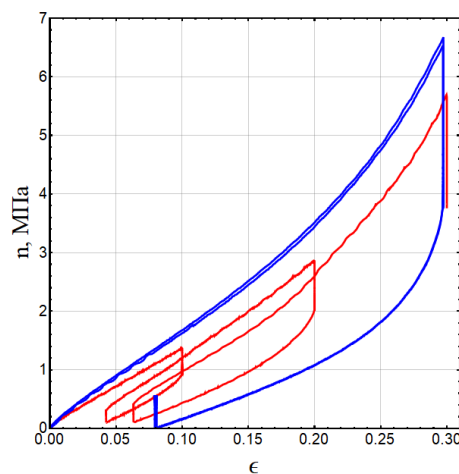


Рис. 3. Диаграммы зависимости номинального напряжения от линейной деформации при испытании на свободное сжатие по программам на рис. 2.

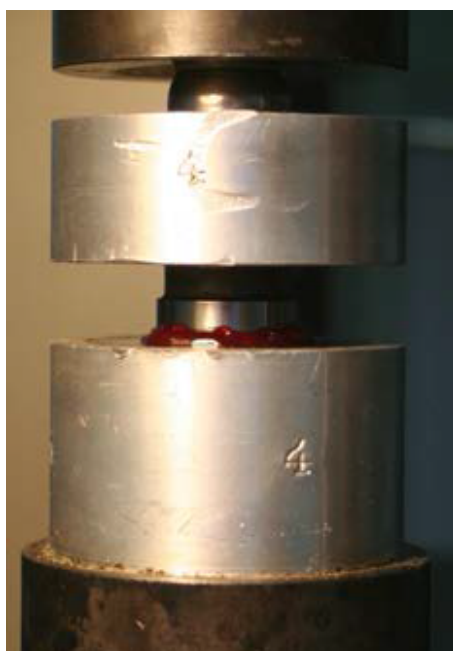


Рис. 4. Приспособление для испытаний на стесненное сжатие цилиндрических образцов.

прямой и обратной релаксации. Эти данные сведены в табл. 1. Значения напряжения в конце этапа релаксации при деформации 30% (кратность удлинения 0.7) различаются на 1%, хотя имеют разную историю деформирования (рис. 2).

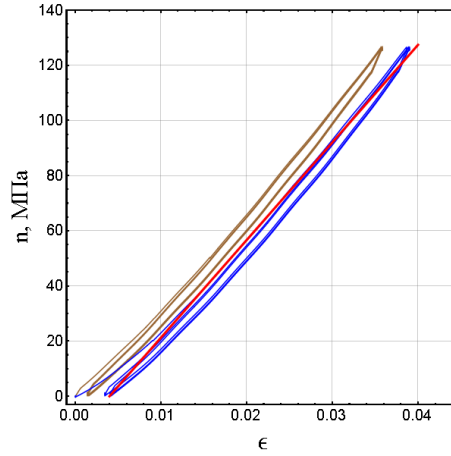


Рис. 5. Данные испытаний на стесненное сжатие и их аппроксимация линейным законом (18) с модулем $B = 3540$ МПа

Равновесный модуль сдвига, оцененный по этим напряжениям при уровнях деформации 10%, 20% и 30% не различаются более чем на 10%. Оценки равновесного модуля по напряжениям и деформациям в процессе обратной релаксации дают существенно более низкие значения.

Параметр	Релаксация				Обратная релаксация		
λ_∞	0.90	0.80	0.70	0.703	0.96	0.94	0.92
n_∞	0.93	2.01	3.78	3.83	0.31	0.41	0.54
$\mu = -n_\infty/(\lambda_\infty - \lambda_\infty^{-2})$	2.79	2.64	2.82	2.90	2.30	2.04	2.10

Таблица 1. Оценки равновесного модуля

Для определения констант b , r_i , $i = 1, \dots, n$ моделей был взят спектр времен релаксации $\tau_i = \{4, 20, 100, 500\}$, оценка $\mu = 2.9$ МПа и экспериментальные данные этапов нагружения и релаксации первой программы. Система (3.1), (3.2) решалась для каждой из моделей; интегралы считались численно. В результате константа b не оказалась значимой для описания данных эксперимента. Значения констант вязкоупругости, определенные для моделей с $b = 0$ (вязкоупругих обобщений “неогука”) сведены в табл. 2.

На рис. 6 приведены расчеты этапов нагружения и релаксации, а на рис. 7 – полных программ испытаний. Расчеты согласно всем трем моделям практически совпадают, что объясняется линейностью вязкоупругого оператора (1), действующего на нелинейные меры деформации. Модели, идентифицированные по минимальному отрезку одной программы, в целом удовлетворительно воспроизводят эволюцию напряжения во времени для обеих, причем во второй программе участки нагружений и разгрузок выполнялись с вдвое меньшей

Модель	Константы				
Simo	$a_1 = 0.434$	$a_2 = 0.038$	$a_3 = 0.076$	$a_4 = 0.032$	$c_{10} = 2.98$ МПа
Yang	$r_1 = 4.66$ МПа	$r_2 = 0.90$ МПа	$r_3 = 1.06$ МПа	$r_4 = 0.50$ МПа	$\mu = 2.90$ МПа
Log	$G_1 = 1.99$ МПа	$G_2 = 0.31$ МПа	$G_3 = 0.45$ МПа	$G_4 = 0.20$ МПа	$c_{10} = 1.45$ МПа

Таблица 2. Константы вязкоупругости маслостойкой резины

скоростью деформаций (рис. 2). Использование для идентификации моделей комбинированных данных испытаний не помогает лучше описать весь комплекс испытаний, для чего требуется исправлять принципиальные дефекты моделей. Расчеты испытаний также выполнены в пакетах ANSYS (первая модель, обозначенная как “Simo” в табл. 2), и LS-DYNA (третья модель, обозначенная как “Log” в табл. 2). Эти расчеты воспроизводят данные непосредственного интегрирования уравнений, что говорит о корректности реализации соответствующих моделей в этих пакетах.

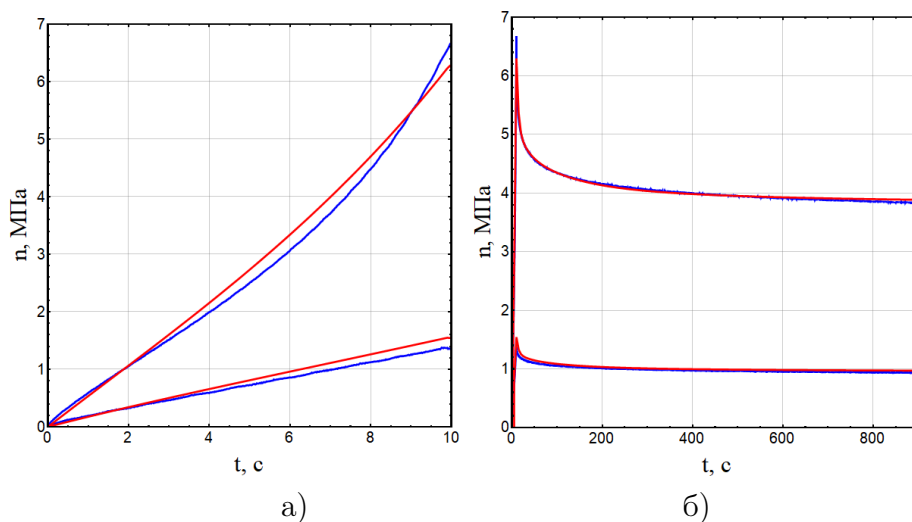


Рис. 6. Данные испытаний на свободное сжатие (нагрузки с двумя различными скоростями и релаксация) и их аппроксимация рассматриваемыми моделями

По данным испытаний на стесненное сжатие было определено значение модуля объемного сжатия $B = 3540$ МПа, наилучшим образом описывающего данные испытаний в рамках (17) (расчет показан на рис. 4 красной линией). В том случае, когда в пакете программ задается не постоянный модуль объемного сжатия, а постоянный коэффициент Пуассона, последний может быть определен по формуле $\nu_{\dot{\epsilon}} = (3B - E_{\dot{\epsilon}})/6B$, где значение условного модуля Юнга

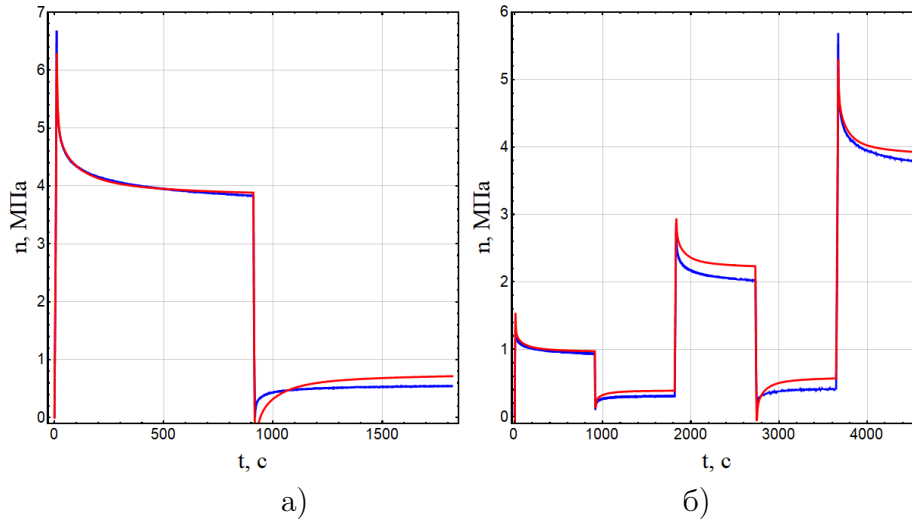


Рис. 7. Данные испытаний на свободное сжатие по двум программам с нагрузками, разгрузками и выдержками и их аппроксимация рассматриваемыми моделями.

может быть оценено по текущему модулю кривой нагружения вязкоупругого материала с конечной скоростью. Для скоростей деформаций от 0 до 0.03 с^{-1} можно оценить $8.7 \text{ МПа} < E_{\dot{\epsilon}} < 13.8 \text{ МПа}$, и $0.4994 < \nu_{\dot{\epsilon}} < 0.4996$.

7. Испытания на растяжение. Предел деформаций в испытании на свободное сжатие ограничен условием однородности образца, которое лимитируется трением. Для определения свойств эластомеров до значительно более высоких степеней деформации можно рассматривать испытания на растяжение образцов в виде лопатки либо кольца согласно ГОСТ 270-75. Для рассматриваемого выше материала делать это не было необходимости, но такие испытания были реализованы для резиновых колец, используемых в качестве уплотнений и направляющих подвижных элементов погружного насоса. Исследуемые кольца имели торообразную форму с внешним диаметром 63 мм и диаметром сечения 3 мм. Кольца располагались между стальными пальцами диаметром 7,82 мм, натягивались небольшой нагрузкой до выпрямления, затем на параллельные сегменты (рабочую часть образца) длиной 48,4 мм наносились метки, и далее относительно этого напряженно-деформированного состояния производилось нагружение со скоростью перемещения траверсы 3 мм/с (что соответствует скорости деформации $0,03 \text{ с}^{-1}$) в течение 10 с до линейной деформации $\epsilon_0 = 0,3$. На рис. 8 приведены две последовательные конфигурации кольца при его испытании на растяжение между пальцами. Далее при этой деформации в течение 900 с происходила релаксация напряжений, разгрузка и возврат при нулевой нагрузке, как и в испытании на свободное сжатие.

На рис. 9 приведены экспериментальные кривые нагружения и релаксации при испытании растяжением колец и их аппроксимации рассматриваемыми моделями с соответствующими константами (табл. 2). В записанных выше соотношениях модели для одноосного сжатия использовалось соотношение для кратности удлинения

$$\lambda(t) = 1 + \dot{\epsilon}_0 t \quad (32)$$

и приняты положительные знаки для номинального напряжения и линейной деформации. Здесь также потребовался лишь одноконстантный вариант сдвиговой части упругого закона, и так же не очень хорошо прогнозируется процесс обратной релаксации. В табл. 3 приведены сдвиговые вязкоупругие константы рассматриваемых моделей (спектр времен релаксации взят тот же). Данное испытание предполагается дополняющим испытания на свободное и стесненное сжатие.

Модель	Константы				
Simo	$a_1 = 0.535$	$a_2 = 0.010$	$a_3 = 0.112$	$a_4 = 0.038$	$c_{10} = 1.52$ МПа
Yang	$r_1 = 1.99$ МПа	$r_2 = 0.07$ МПа	$r_3 = 0.43$ МПа	$r_4 = 0.17$ МПа	$\mu = 0.93$ МПа
Log	$G_1 = 1.67$ МПа	$G_2 = 0.11$ МПа	$G_3 = 0.38$ МПа	$G_4 = 0.14$ МПа	$c_{10} = 0.47$ МПа

Таблица 3. Константы вязкоупругости материала колец

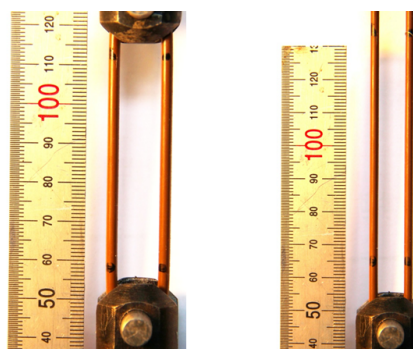


Рис. 8. Две последовательные конфигурации кольца при его испытании на растяжение между пальцами

8. Заключение. Предложена программа базовых испытаний и методика идентификации подходящих моделей для описания вязкоупругих свойств слабосжимаемых материалов при конечных деформациях, которая реализована для высоконаполненных маслостойких резин, применяемых в качестве

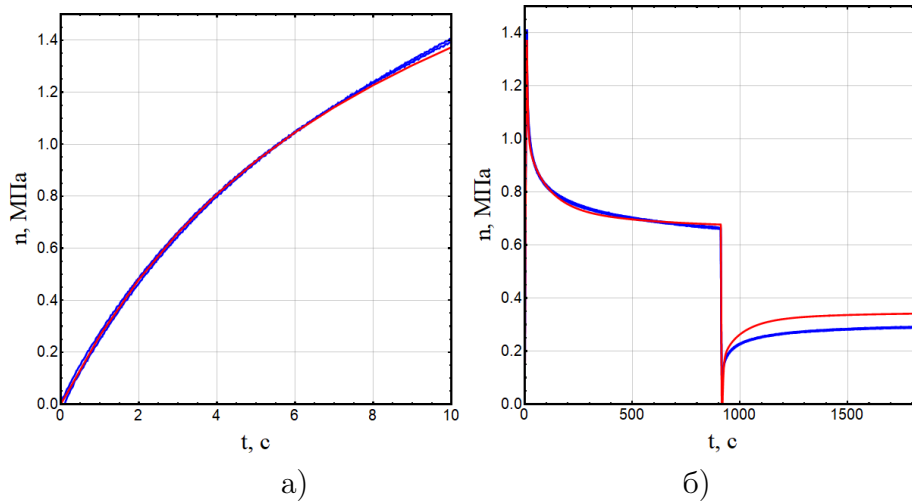


Рис. 9. Данные испытаний на растяжение колец по программе с нагружением, разгрузкой и выдержками и их аппроксимация рассматриваемыми моделями.

элементов уплотнения погружных нефтяных насосов. Реализация испытаний осуществляется с помощью универсальной электромеханической испытательной машины с жестким приводом, снабженной экстензометром и требует минимальной оснастки. Методика определения констант моделей элементарна и прозрачна, если свойства материала в принципе описываются рассматриваемыми простейшими линейными наследственными обобщениями гиперупругих соотношений. С использованием методики по части данных испытаний определены константы трех моделей, в целом удовлетворительно описывающие полные программы испытаний. Данные модели реализованы во всех популярных пакетах программ механики деформируемого твердого тела. Для более корректного описания обратной ползучести необходимо рассматривать квазилинейные модели вязкоупругости [16, 19, 20], которые для поставленной задачи выглядят избыточными.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Исследование выполнено в рамках госзадания (номер госрегистрации 126020916885-8).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The study was carried out within the framework of a state assignment (state registration number 126020916885-8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bergström J. *Mechanics of Solid Polymers: Theory and Computational Modeling*. Elsevier, 2015. 509 p.
2. Адамов А. А. Сравнительный анализ двухконстантных обобщений закона Гука для изотропных упругих материалов при конечных деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42, № 5. С. 183–192.
3. Роговой А. А. Формализованный подход к построению моделей механики деформируемого твердого тела. Часть 2. Упругие и термо-упруго-неупругие процессы при конечных деформациях. Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2023. 318 с.
4. LS-DYNA Theory Manual. ANSYS Inc., 2024. 902 p.
5. ANSYS/R1 Theory Reference. ANSYS Inc., 2024. 986 p.
6. COMSOL Multiphysics User Guide. COMSOL, 2012. 1292 p.
7. ABAQUS Analysis User's Guide. Vol. III: Materials. Dassault Systems, 2013. 697 p.
8. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // ПММ. 1948. Т. 12, № 1. С. 53–62.
9. Хохлов А. В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для реономных материалов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 2. С. 29–47.
10. Фанг Я. Ч. Математические модели зависимости напряжение-деформация для мягких тканей // Механика полимеров. 1975. № 5. С. 850–867.
11. Simo J. C. On a Fully Three-Dimensional Finite-Strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspects // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1987. Vol. 60. P. 153–173.
12. Simo J. C., Hughes T. J. R. *Computational Inelasticity*. New York: Springer, 1998. 392 p.
13. Holzapfel G. A. On Large Strain Viscoelasticity: Continuum Formulation and Finite Element Applications to Elastomeric Structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1996. Vol. 39. P. 3903–3926.
14. Laksari K., Shafieian M., Darvish K. Constitutive Model for Brain Tissue under Finite Compression // Journal of Biomechanics. 2012. Vol. 45, no. 4. P. 642–646.
15. Адамов А. А. Исследование и моделирование нестационарного термомеханического поведения вязкоупругих резиноподобных материалов и элементов конструкций при конечных деформациях: дис. ... канд. / Адамов А. А. Пермь, 2004. С. 303. Дисс. ... д-ра физ.-мат. н.
16. Yang L. M., Shim V. P. W., Lim C. T. A Visco-Hyperelastic Approach to Modelling the Constitutive Behaviour of Rubber // International Journal of Impact Engineering. 2000. Vol. 24. P. 545–560.

17. Belyakova T. A., Zezin Y. P., Lomakin E. V. Thermovisco-Hyperelastic Behavior of Elastomeric Materials Modified by Filler Nanoparticles // *Mechanics of Solids*. 2010. Vol. 45, no. 4. P. 546–561.
18. Wang X., Ji H., Li X., et al. Static and Dynamic Compressive and Tensile Response of Highly Stretchable Polyurea // *International Journal of Impact Engineering*. 2022. Vol. 166. P. 104250. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2022.104250.
19. Ghobadi E., Shutov A., Steeb H. Parameter Identification and Validation of Shape-Memory Polymers within the Framework of Finite Strain Viscoelasticity // *Materials*. 2021. Vol. 14. P. 2049. DOI: 10.3390/ma14082049.
20. Mokhireva K. A., Svistkov A. L., Shadrin V. V. Investigation of the Strain Rate and Stretch Level Dependent Behavior of Elastomeric Nanocomposites in Complex Uniaxial Tests under Finite Strains // *Mechanics of Materials*. 2024. Vol. 199. P. 105177. DOI: 10.1016/j.mechmat.2024.105177.
21. Adamov A. A., Keller I. E., Zhilin S. G., Bogdanova N. A. Identification of the Cap Model of Elastoplasticity of Non-Compact Media Under Compressive Mean Stress // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 4. DOI: 10.1134/S002565442460291X.
22. Адамов А. А., Матвеев В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н. Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.

REFERENCES

1. Bergström J. *Mechanics of Solid Polymers: Theory and Computational Modeling*. Elsevier, 2015. 509 p.
2. Adamov A. A. Comparative Analysis of Two-Constant Generalizations of Hooke's Law for Isotropic Elastic Materials under Finite Deformations // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2001. Vol. 42, no. 5. P. 183–192. (in Russian).
3. Rogovoi A. A. A Formalized Approach to Constructing Models of Deformable Solid Mechanics. Part 2. Elastic and Thermo-Elastic-Inelastic Processes under Finite Deformations. Moscow, Izhevsk: Institute of Computer Science, 2023. 318 p. (in Russian).
4. LS-DYNA Theory Manual. ANSYS Inc., 2024. 902 p.
5. ANSYS/R1 Theory Reference. ANSYS Inc., 2024. 986 p.
6. COMSOL Multiphysics User Guide. COMSOL, 2012. 1292 p.
7. ABAQUS Analysis User's Guide. Vol. III: Materials. Dassault Systems, 2013. 697 p.
8. Rabotnov Y. N. Equilibrium of an Elastic Medium with Aftereffect // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1948. Vol. 12, no. 1. P. 53–62. (in Russian).
9. Khokhlov A. V. Properties of a Family of Stress–Strain Curves Generated by Rabotnov's Nonlinear Relation for Rheonomic Materials // *Mechanics of Solids*. 2019. No. 2. P. 29–47. (in Russian).
10. Fang Y. C. Mathematical Stress–Strain Models for Soft Tissues // *Mechanics of Polymers*. 1975. No. 5. P. 850–867. (in Russian).
11. Simo J. C. On a Fully Three-Dimensional Finite-Strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspects // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1987. Vol. 60. P. 153–173.

12. Simo J. C., Hughes T. J. R. Computational Inelasticity. New York: Springer, 1998. 392 p.
13. Holzapfel G. A. On Large Strain Viscoelasticity: Continuum Formulation and Finite Element Applications to Elastomeric Structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1996. Vol. 39. P. 3903–3926.
14. Laksari K., Shafieian M., Darvish K. Constitutive Model for Brain Tissue under Finite Compression // Journal of Biomechanics. 2012. Vol. 45, no. 4. P. 642–646.
15. Adamov A. A. Investigation and Modeling of the Unsteady Thermomechanical Behavior of Viscoelastic Rubber-Like Materials and Structural Elements under Finite Deformations: PhD thesis / Adamov A. A. Perm, 2004. P. 303. Doctoral Dissertation in Physical and Mathematical Sciences; (in Russian).
16. Yang L. M., Shim V. P. W., Lim C. T. A Visco-Hyperelastic Approach to Modelling the Constitutive Behaviour of Rubber // International Journal of Impact Engineering. 2000. Vol. 24. P. 545–560.
17. Belyakova T. A., Zezin Y. P., Lomakin E. V. Thermovisco-Hyperelastic Behavior of Elastomeric Materials Modified by Filler Nanoparticles // Mechanics of Solids. 2010. Vol. 45, no. 4. P. 546–561.
18. Wang X., Ji H., Li X., et al. Static and Dynamic Compressive and Tensile Response of Highly Stretchable Polyurea // International Journal of Impact Engineering. 2022. Vol. 166. P. 104250. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2022.104250.
19. Ghobadi E., Shutov A., Steeb H. Parameter Identification and Validation of Shape-Memory Polymers within the Framework of Finite Strain Viscoelasticity // Materials. 2021. Vol. 14. P. 2049. DOI: 10.3390/ma14082049.
20. Mokhireva K. A., Svistkov A. L., Shadrin V. V. Investigation of the Strain Rate and Stretch Level Dependent Behavior of Elastomeric Nanocomposites in Complex Uniaxial Tests under Finite Strains // Mechanics of Materials. 2024. Vol. 199. P. 105177. DOI: 10.1016/j.mechmat.2024.105177.
21. Adamov A. A., Keller I. E., Zhilin S. G., Bogdanova N. A. Identification of the Cap Model of Elastoplasticity of Non-Compact Media Under Compressive Mean Stress // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 4. DOI: 10.1134/S002565442460291X.
22. Adamov A. A., Matveenkov V. P., Trufanov N. A., Shardakov I. N. Methods of Applied Viscoelasticity. Yekaterinburg: Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2003. 411 p. (in Russian).