

И. М. Лавит, О. С. Перова

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСЕ

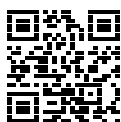
Тульский государственный университет, Тула, Россия

Аннотация. Рассматривается плоская задача линейной механики разрушения для полосы с прямоугольным поперечным сечением, ослабленной центральной прямолинейной трещиной. В дополнение к коэффициенту интенсивности напряжений определяется Т-напряжение, имеющее конечное и отличное от нуля значение в кончике трещины. Решение задачи ищется методом конечных элементов. Необходимость вычисления Т-напряжения предъявляет повышенные требования к точности решения задачи. С этой целью в дополнение к обычным функциям формы конечных элементов вводятся координатные функции, моделирующие сингулярность поля напряжений в кончике трещины. Для согласования с главными граничными условиями в качестве таких функций используется аналитическое решение этой же задачи для бесконечной области. Результаты расчетов сопоставляются с данными других исследователей.

Ключевые слова: разрушение, трещина, метод конечных элементов, метод Ритца—Галеркина, Т-напряжение

Лавит Игорь Михайлович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры вычислительной механики и математики; e-mail: IgorLavit@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-8683-5943>; AuthorID:14837

Перова Ольга Сергеевна, аспирант 2-го года обучения кафедры вычислительной механики и математики; e-mail: o.s.perova@yandex.ru; <https://orcid.org/009-0000-7489-9256>; AuthorID:1272696



для цитирования: Лавит И. М., Перова О. С. Напряженное состояние окрестности вершины центральной трещины в прямоугольной полосе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 104–118. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.007. EDN: NYRJLR

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

I. M. Lavit, O. S. Perova

THE STRESS STATE OF THE VICINITY OF THE CENTRAL CRACK IN A RECTANGULAR STRIP

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. A plane problem of linear fracture mechanics is considered for a strip with a rectangular cross-section, weakened by a central straight crack. In addition to the stress intensity factor, the T-stress is determined, which has a finite and non-zero value at the crack tip. The problem is solved using the finite element method. The need to calculate the T-stress imposes higher requirements on the accuracy of the problem solution. To achieve this, coordinate functions are introduced in addition to the usual shape functions of the finite elements, which model the singularity of the stress field at the crack tip. To agree with the main boundary conditions, an analytical solution of the same problem for an infinite domain is used as such functions. The results of calculations are compared with data from other researchers.

Keywords: fracture, crack, finite element method, Ritz—Galerkin method, T-stress.

Igor M. Lavit, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Computational Mechanics and Mathematics; **e-mail:** IgorLavit@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-8683-5943>; AuthorID:14837

Olga S. Perova, 2nd-year postgraduate student at the Department of Computational Mechanics and Mathematics; **e-mail:** o.s.perova@yandex.ru; <https://orcid.org/009-0000-7489-9256>; AuthorID: 1272696



to cite this article: Lavit I. M., Perova O. S. The stress state of the vicinity of the central crack in a rectangular strip // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 104–118. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.007

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В последние годы к оценке роста трещины существенно расширяются: наряду с коэффициентами интенсивности напряжений в расчет включают несингулярные компоненты тензора напряжений, действующие в зоне вблизи вершины (кончика) трещины [1, 2]. Для определения как этих составляющих, так и самих коэффициентов интенсивности применяют разнообразные численные методы [1]. Среди них особое место занимает метод конечных элементов – он считается наиболее универсальным, простым в реализации и надежным [3, 4]. Однако у стандартных конечных элементов есть существенный недостаток: их функции формы представляют собой многочлены сравнительно низкого порядка. Из-за этого аппроксимация полей напряжений в окрестности кончика трещины – то есть в особой точке – отличается невысокой точностью. Чтобы корректно воспроизвести асимптотическое поведение поля напряжений, требуется модификация метода конечных элементов. Одна из таких модификаций представлена ниже. Ее суть заключается во включении в описание каждого конечного элемента специальных функций, отражающих сингулярное поведение поля. При этом используемые для моделирования сингулярности функции идентичны для всех элементов – это позволяет сохранить непрерывность поля перемещений на границах между элементами. Важное достоинство подхода – отсутствие жестких требований к типу конечных элементов: допустимо применять элементы произвольной формы. С концептуальной точки зрения данный метод представляет собой синтез классического метода конечных элементов и классического метода Рунге–Галеркина [4]. Координатные функции включают в себя как функции с компактными носителями – конечными элементами, так и функции, имеющие единое аналитическое выражение во всей области.

Метод применим к широкому спектру квазистатических задач механики разрушения – в том числе в задачам с криволинейными трещинами. Для оценки точности метода и анализа его потенциала необходимо обратиться к базовым, фундаментальным задачам. Ниже приведено решение одной из таких задач: рассматривается прямоугольная область (поперечное сечение полосы), находящаяся под действием растягивающих нагрузок и ослабленная центральной трещиной.

1. Постановка задачи. На рисунке 1 показана расчетная схема прямоугольной области, содержащей центральную трещину. Принято, что кромки трещины не испытывают внешней нагрузки. Поскольку и сечение, и прикладываемая нагрузка симметричны относительно оси абсцисс, рассматриваемая трещина классифицируется как трещина нормального разрыва [5].

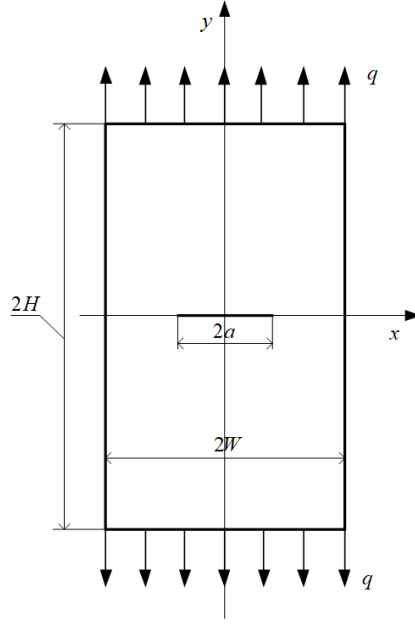


Рис. 1. Прямоугольная область с центральной трещиной

Математическая модель основана на известных соотношениях теории упругости, записываемых как [6]:

$$\begin{aligned} \partial_m \sigma_{km} &= 0; \quad \varepsilon_{km} = (\partial_k u_m + \partial_m u_k)/2; \\ \sigma_{km} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu \varepsilon_{ii} \delta_{km} + (1-2\nu) \varepsilon_{km}]; \\ i, k, m &= 1, 2; \quad \partial_k = \partial/\partial x_k, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_k(x_m)$ —поле перемещений, ε_{km} —тензор напряжений, E —модуль Юнга, ν —коэффициент Пуассона, δ_{km} —символ Кронекера. Далее будем также использовать следующие обозначения:

$$x = x_1; \quad y = x_2; \quad u = u_1; \quad v = u_2 \quad (2)$$

Решение уравнения равновесия (первое уравнение системы (1)) должно удовлетворять граничным условиям. Граничные условия могут быть либо главными (кинематическими), либо естественными (статическими) [3].

Пусть r, θ —полярные координаты точки:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta \quad (3)$$

В окрестности кончика трещины ($r \rightarrow 0$) напряжения представляются в виде:

$$\sigma_{km} = \sigma_{km}^{(0)} + \sigma_{km}^{(1)} + O(\sqrt{r}) \quad (4)$$

где $\sigma_{km}^{(0)}$ —сингулярные составляющие тензора напряжений, $\sigma_{km}^{(1)}$ —несингулярные составляющие, отличные от нуля в кончике трещины. Напряжения $\sigma_{km}^{(0)}$ и соответствующие им деформации и перемещения записываются в виде [5]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{km}^{(0)} &= K_I \sigma_{km}^*; & u_k^{(0)} &= K_I u_k^*; & \varepsilon_{km}^{(0)} &= K_I \varepsilon_{km}^*; \\
 \sigma_{11}^* &= \sigma_{xx}^* = \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2\pi r}} [1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)]; \\
 \sigma_{12}^* &= \sigma_{xy}^* = \frac{\cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \cos(3\theta/2)}{\sqrt{2\pi r}}; \\
 \sigma_{22}^* &= \sigma_{yy}^* = \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2\pi r}} [1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)]; \\
 \varepsilon_{11}^* &= \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu) \sigma_{11}^* - \nu \sigma_{22}^*]; & \varepsilon_{22}^* &= \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu) \sigma_{22}^* - \nu \sigma_{11}^*]; \\
 \varepsilon_{12}^* &= \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{12}^*; & u_1^* &= u^* = \frac{(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos \theta) \cos(\theta/2); \\
 u_2^* &= v^* = \frac{(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos \theta) \sin(\theta/2)
 \end{aligned} \tag{5}$$

где для плоской деформации $\kappa = 3 - 4\nu$. Вследствие непрерывности напряжений $\sigma_{km}^{(1)}$ получается:

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{22}^{(1)} = 0; \quad \sigma_{11}^{(1)} = T \tag{6}$$

где величина T , называемая T -напряжением [1, 2], определяется в процессе решения задачи. Для оценки несингулярных напряжений в кончике трещины Ливерс и Радон [7] предложили безразмерный параметр B , названный ими двухосевым отношением:

$$B = T \sqrt{\pi a} / K_I \tag{7}$$

Таким образом, целью решения задачи является определение K_I и B .

2. Метод решения задачи. Решение задачи ищется методом конечных элементов. Оно получается из принципа виртуальных работ [6]:

$$\int_S \sigma_{km} \delta \varepsilon_{km} dS = \int_L p_k \delta u_k dL \tag{8}$$

где S —площадь рассматриваемой области, ограниченной контуром L , к которому приложена распределенная нагрузка p_k ; δ —символ вариации. Уравнение (8) эквивалентно уравнению равновесия (1) и естественным граничным условиям. Решение уравнения (8) разыскивается в классе функций, удовлетворяющих главным граничным условиям. При этом вариации перемещений на участках граничного контура, где заданы главные граничные условия, равны нулю.

В ходе решения задачи применяли изопараметрические конечные элементы первого порядка. В глобальной системе координат (x, y) такие элементы, как правило, имеют форму произвольных выпуклых четырехугольников [3]. Однако в рамках данной задачи, где граничный контур сформирован отрезками прямых, ориентированных параллельно координатным осям, все элементы принимают прямоугольную форму. В локальной системе координат эти элементы идентичны друг другу (рис. 2).

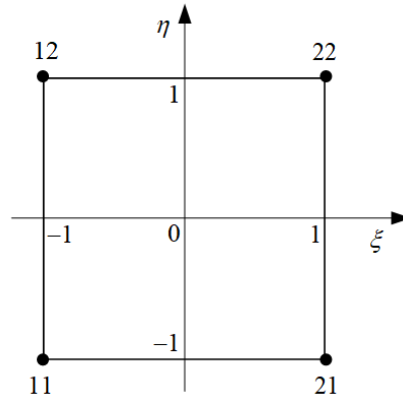


Рис. 2. Конечный элемент в локальных координатах—квадрат. Узлы имеют двойную нумерацию

Рассмотрим интегрирование в уравнении (8) по одному элементу. Глобальные координаты точек элемента определяются формулами:

$$\begin{aligned} x &= L_i(\xi) L_j(\eta) X_{ij}; & y &= L_i(\xi) L_j(\eta) Y_{ij}; \\ i, j &= 1, 2; & \xi, \eta &\in [-1, 1] \end{aligned} \quad (9)$$

где X_{ij} , Y_{ij} —известные глобальные координаты узла с номером i, j , $L_I(\zeta)$ —интерполяционные полиномы Лагранжа, которые в данном случае имеют вид:

$$L_1(\zeta) = 0.5(1 - \zeta); \quad L_2(\zeta) = 0.5(1 + \zeta); \quad \zeta \in [-1; 1] \quad (10)$$

Для перемещений точек элемента используются те же функции формы, что и для координат. Но для точного моделирования асимптотик перемещений и напряжений к ним добавляются составляющие, определенные равенствами (5). Таким образом, получаем:

$$u = L_i(\xi) L_j(\eta) U_{ij} + K_I u^*; \quad v = L_i(\xi) L_j(\eta) V_{ij} + K_I v^* \quad (11)$$

Вторые слагаемые добавляются в выражения перемещений во все конечные элементы. За счет этого обеспечивается межэлементная непрерывность поля перемещений. Конечно, теперь величины U_{ij} , V_{ij} не являются узловыми перемещениями. Это просто неизвестные коэффициенты при координатных функциях.

К ним добавляется еще и коэффициент K_I . Приведенных соотношений достаточно, чтобы выполнить интегрирование уравнения (8) по элементу. Интеграл от левой части получается в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left\{ \left[\left((1-\nu) c_{ijmn}^{(1)} + 0.5 (1-2\nu) c_{ijmn}^{(2)} \right) U_{mn} + \right. \right. \\
& + \left. \left(\nu c_{ijmn}^{(3)} + 0.5 (1-2\nu) c_{mni j}^{(3)} \right) V_{mn} \right] \delta U_{ij} + \\
& + \left[\left(\nu c_{mni j}^{(3)} + 0.5 (1-2\nu) c_{ijmn}^{(3)} \right) U_{mn} + \right. \\
& + \left. \left. \left((1-\nu) c_{ijmn}^{(2)} + 0.5 (1-2\nu) c_{ijmn}^{(1)} \right) V_{mn} \right] \delta V_{ij} \right\} + \\
& + \left(e_{ij11}^{(1)} + e_{ij12}^{(2)} \right) K_I \delta U_{ij} + \left(e_{ij22}^{(2)} + e_{ij12}^{(1)} \right) K_I \delta V_{ij} + \\
& + \left[\left(e_{mn11}^{(1)} + e_{mn12}^{(2)} \right) U_{mn} + \left(e_{mn22}^{(2)} + e_{mn12}^{(1)} \right) V_{mn} \right] \delta K_I + g K_I \delta K_I
\end{aligned} \tag{12}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
c_{ijmn}^{(1)} &= \int_S \Phi_{ij} \Phi_{mn} dS; \quad c_{ijmn}^{(2)} = \int_S F_{ij} F_{mn} dS; \quad c_{ijmn}^{(3)} = \int_S \Phi_{ij} F_{mn} dS; \\
e_{ijmn}^{(1)} &= \int_S \Phi_{ij} \sigma_{mn}^* dS; \quad e_{ijmn}^{(2)} = \int_S F_{ij} \sigma_{mn}^* dS; \\
g &= \frac{(1+\nu)}{E} \int_S \left[(1-\nu) \sigma_{mm}^* \sigma_{mm}^* - 2\nu \sigma_{11}^* \sigma_{22}^* + 2(\sigma_{12}^*)^2 \right] dS
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь S —площадь одного элемента. Интегрирование и вычисление подынтегральных функций проводится в локальных координатах по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\int_S f dS &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f |J| d\xi d\eta; \quad J = \det \mathbf{J}; \\
\mathbf{J} &= \begin{pmatrix} \partial_\xi x & \partial_\eta x \\ \partial_\xi y & \partial_\eta y \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \partial_x \xi & \partial_y \xi \\ \partial_x \eta & \partial_y \eta \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1}; \\
\Phi_{ij}(\xi, \eta) &= 0.5 \left[(-1)^i L_j(\eta) \partial_x \xi + (-1)^j L_i(\xi) \partial_x \eta \right]; \\
F_{ij}(\xi, \eta) &= 0.5 \left[(-1)^i L_j(\eta) \partial_y \xi + (-1)^j L_i(\xi) \partial_y \eta \right]
\end{aligned} \tag{14}$$

где обозначено: $\partial_\alpha = \partial/\partial\alpha$. Суммирование вкладов всех конечных элементов и переход к глобальной нумерации переменных приводит левую часть уравнения (8) к виду:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}; \quad \mathbf{Z} = [z_m]; \quad \mathbf{A} = [a_{km}]; \quad k, m = 1, \dots, N+1; \\ N = 2M; \quad z_{N+1} = K_I \end{aligned} \quad (15)$$

где $\mathbf{Z}$ —матрица-столбец искоемых неизвестных, $\mathbf{A}$ —глобальная матрица жесткости, M —число узлов конечноэлементной сетки, индекс T обозначает транспонирование. Матрица $\mathbf{A}$ симметрична и положительно определена. Если бы не было последних строки и столбца, она была бы ленточной.

Определим вклад отдельного конечного элемента в правую часть уравнения (8). Следует учитывать, что значимый (ненулевой) вклад формируют лишь те элементы, чьи стороны располагаются на участке граничного контура с приложенной нагрузкой. В результате получаем:

$$\begin{aligned} \int_L p_k \delta u_k dL &= \chi_{ij}^{(1)} \delta U_{ij} + \chi_{ij}^{(2)} \delta V_{ij} + \psi \delta K_I \\ \chi_{ij}^{(1)} &= \int_L p_1 L_i(\xi) L_j(\eta) dL; \quad \chi_{ij}^{(2)} = \int_L p_2 L_i(\xi) L_j(\eta) dL; \\ \psi &= \int_L (p_1 u^* + p_2 v^*) dL; \quad dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \end{aligned} \quad (16)$$

Интегрирование проводится вдоль какой-либо стороны элемента. Пусть, например, это сторона $\eta = 1$. Интегралы (16) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \chi_{i1}^{(1)} &= 0; \quad \chi_{i1}^{(2)} = 0; \quad \chi_{i2}^{(1)} = \omega \int_{-1}^1 p_1 L_i(\xi) d\xi; \quad \chi_{i2}^{(2)} = \omega \int_{-1}^1 p_2 L_i(\xi) d\xi; \\ \psi &= \omega \int_{-1}^1 (p_1 u^* + p_2 v^*) d\xi; \quad \omega = 0.5 \sqrt{(X_{22} - X_{12})^2 + (Y_{22} - Y_{12})^2} \end{aligned} \quad (17)$$

В результате суммирования по элементам и переходу к глобальной нумерации получается матрица—столбец свободных членов $\mathbf{Q} = [q_m]$, $m = 1, \dots, N+1$. Уравнение (8) принимает вид:

$$\delta \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} = \delta \mathbf{Z}^T \mathbf{Q} \quad (18)$$

Важно принять во внимание главные граничные условия—их требуется обеспечить в точках коллокации. В рассматриваемой задаче такими точками выступают узлы конечноэлементной сетки, расположенные на тех участках граничного контура, где заданы главные граничные условия. Согласно подходу, описанному в работе [3], удовлетворение этих условий осуществляется уже на этапе после построения разрешающей системы линейных алгебраических уравнений. Поэтому будем считать все вариации $\delta \mathbf{Z}$ произвольными, но зато добавим к известным активным силам $\mathbf{Q}$ неизвестные силы реакции связей $\mathbf{R} = [r_m]$, $m = 1, \dots, N + 1$. Величины r_m отличны от нуля только для тех m , для которых заданы узловые перемещения, которые и являются главными граничными условиями. Вариация работы реакции связи на таком перемещении будет, в соответствии с равенствами (11), равна:

$$r_m (\delta z_m + \gamma_m \delta K_I) \quad (19)$$

где коэффициент γ_m представляет собой $u^*(r, \theta)$ или $v^*(r, \theta)$ в зависимости от того, по какой оси направлено заданное перемещение. Координаты r, θ здесь являются полярными координатами узла, перемещение которого задано. Из выражения (19) следует, что

$$\delta \mathbf{Z}^T \mathbf{R} = \sum_{m=1}^N r_m \delta z_m + r_{N+1} \delta K_I; \quad r_{N+1} = \sum_{m=1}^N \gamma_m r_m \quad (20)$$

Так как вариации $\delta \mathbf{Z}$ произвольны, получаем вариационное уравнение и эквивалентную ему систему линейных алгебраических уравнений в виде:

$$\delta \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} = \delta \mathbf{Z}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \mathbf{Z} = \mathbf{Q} + \mathbf{R} \quad (21)$$

Выделим из матрицы $\mathbf{A}$ первые N строк и столбцов. Они образуют новую матрицу $\mathbf{A}' = [a'_{km}]$ порядка N . Отметим, что эта матрица является ленточной. Выделим также из матрицы $\mathbf{Q}$ первые N элементов. Они образуют матрицу—столбец $\mathbf{Q}' = [q'_m]$ порядка N . Образует матрицу—столбец из первых N элементов последнего столбца матрицы $\mathbf{A}$: $\mathbf{S}' = [s'_m]$; $s'_m = -a_{m, N+1}$. Это позволяет разделить матрицу—столбец $\mathbf{Z}$ на две составляющие, одна из которых определяется нагрузкой, а вторая—величиной K_I .

Число неизвестных в системе (21) превышает число уравнений. Но вместо того чтобы дополнять систему (21) уравнениями связей (главных граничных условий), преобразуем матрицы $\mathbf{A}'$, $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{S}'$ методом, предложенным в работе [3]. Пусть задано перемещение c_j . В соответствии с равенством

$$z_j = c_j - \gamma_j z_{N+1} \quad (22)$$

перенесем известные величины в правые части:

$$q'_m := q'_m - a'_{mj} c_j; \quad s'_m := s'_m + a'_{mj} \gamma_j; \quad m = 1, \dots, N \quad (23)$$

После выполнения этой процедуры для всех заданных перемещений, обнуляются j -ая строка и j -ый столбец матрицы $\mathbf{A}'$ за исключением диагонального

элемента, а также задаются j -ые элементы правых частей в соответствии с равенством (22):

$$\begin{aligned} a'_{jm} &:= 0; & a'_{mj} &:= 0; & m &= 1, \dots, N; \\ a'_{jj} &:= 1; & q'_j &:= c_j; & s'_j &:= -\gamma_j \end{aligned} \quad (24)$$

В результате этих преобразований матрица $\mathbf{A}'$ по-прежнему остается симметричной и ленточной. Приходим к решению двух систем уравнений N -ого порядка, отличающихся правой частью:

$$\mathbf{A}'\mathbf{Z}' = \mathbf{Q}'; \quad \mathbf{A}'\mathbf{Z}'' = \mathbf{S}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}' + K_I\mathbf{Z}'' \quad (25)$$

Равенства (25) относятся только к первым N элементам матрицы-столбца $\mathbf{Z}$. Таким образом, в результате решения систем уравнений (25) эти элементы оказались определены с точностью до константы $K_I = z_{N+1}$. Она находится из последнего уравнения системы (21). Предварительно нужно выразить реакции связей из уравнения (21):

$$r_m = -q_m + \sum_{n=1}^N a_{mn}z'_n + K_I \left(\sum_{n=1}^N a_{mn}z''_n + a_{m,N+1} \right) \quad (26)$$

Отметим, что величины r_m отличны от нуля только для тех m , для которых заданы главные граничные условия. С учетом равенства (20) последнее уравнение системы (21) принимает вид:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N a_{N+1,m}z'_m + K_I \left(\sum_{m=1}^N a_{N+1,m}z''_m + a_{N+1,N+1} \right) = \\ q_{N+1} + \sum_{m=1}^N \gamma_m \left[-q_m + \sum_{n=1}^N a_{mn}z'_n + K_I \left(\sum_{n=1}^N a_{mn}z''_n + a_{m,N+1} \right) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Из этого уравнения определяется коэффициент интенсивности напряжений K_I .

Рассмотрим важный частный случай, когда составляющие перемещений (5) удовлетворяют нулевым главным граничным условиям, то есть когда все величины γ_j равны нулю (см. равенство (22)). При этом уравнение (27) существенно упрощается:

$$K_I = \frac{q_{N+1} - \sum_{m=1}^N a_{N+1,m}z'_m}{\sum_{m=1}^N a_{N+1,m}z''_m + a_{N+1,N+1}} \quad (28)$$

Несингулярные компоненты тензора напряжений вычисляются с использованием стандартных соотношений, принятых в методе конечных элементов. Внутри отдельного конечного элемента производные от перемещений (без учета сингулярных составляющих) задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\partial_x u &= \Phi_{ij}(\xi, \eta) U_{ij}; & \partial_y u &= F_{ij}(\xi, \eta) U_{ij}; \\ \partial_x v &= \Phi_{ij}(\xi, \eta) V_{ij}; & \partial_y v &= F_{ij}(\xi, \eta) V_{ij}\end{aligned}\quad (29)$$

Далее по формулам (1) находятся несингулярные составляющие деформаций и напряжений. Пусть кончик трещины совпадает с каким-либо узлом конечноэлементной сетки. Этот узел входит в два конечных элемента. Обозначим их через "+" и "-". Пусть $\sigma_{xx}^{(+)}$ представляет собой несингулярное напряжение в кончике трещины для одного элемента, а $\sigma_{xx}^{(-)}$ — для другого. В качестве Т-напряжения выбирается средняя величина:

$$T = 0.5 (\sigma_{xx}^{(+)} + \sigma_{xx}^{(-)}) \quad (30)$$

3. Результаты расчетов. Поставленная задача (1) имеет две оси симметрии. Расчетная схема, учитывающая симметрию задачи, изображена на рис. 3. Сформулируем граничные условия задачи. Участок контура АВ (условия симметрии): $u = 0$; $\sigma_{xy} = 0$. Первое условие является главным, а второе — естественным. Участок контура ВС: $\sigma_{xy} = 0$; $\sigma_{yy} = q$. Оба условия являются естественными. Участок контура CD: $\sigma_{xx} = 0$; $\sigma_{xy} = 0$. Оба условия являются естественными. Участок контура DE (условия симметрии): $v = 0$; $\sigma_{xy} = 0$. Первое условие является главным, а второе — естественным. Участок контура EA (линия трещины): $\sigma_{xy} = 0$; $\sigma_{yy} = 0$. Оба условия являются естественными. Как несложно заметить, компоненты перемещений (5) не соответствуют главному граничному условию на участке контура АВ. В связи с этим для нахождения K_I следует воспользоваться уравнением (27). Вместе с тем допустимо применить и альтернативный способ решения задачи. В работе [5], приведено аналитическое решение схожей задачи для плоскости, то есть при $H, W \rightarrow \infty$. Перемещения, отвечающие сингулярной части этого решения, согласуются с условиями симметрии, а значит, удовлетворяют и главным граничным условиям рассматриваемой задачи.

В рассматриваемом случае для моделирования сингулярной части численного решения в качестве координатных функций допустимо использовать сингулярную компоненту решения задачи о трещине в плоскости [5]. В результате

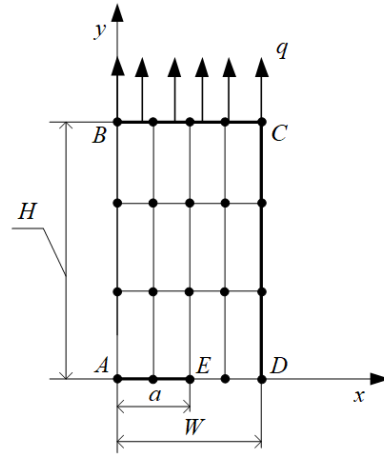


Рис. 3. Расчетная схема—верхняя четверть области, вырезанная осями симметрии. Конечные элементы—прямоугольники. Их количество в горизонтальном направлении равно n_1 (на рисунке $n_1 = 4$), их количество в вертикальном направлении равно n_2 (на рисунке $n_2 = 3$)

получаем следующие выражения [5, 6]:

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^* + \sigma_{yy}^* = 2 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ \sigma_{yy}^* - \sigma_{xx}^* + 2i\sigma_{xy}^* = 2 [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \\ u^* + iv^* = \frac{1+\nu}{E} [\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \end{cases}; \quad (31)$$

$$\varphi(z) = \frac{(z^2 - a^2)^{1/2}}{2\sqrt{\pi a}}; \quad \psi(z) = -\frac{a^2}{2\sqrt{\pi a}(z^2 - a^2)^{1/2}}; \quad z = x + iy$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ —комплексные потенциалы [6], i —мнимая единица. Начало координат расположено в середине трещины (1). Черта над символом обозначает комплексное сопряжение.

Разбиение расчетной области на конечные элементы вдоль осей координат выбрано равномерным. Такой подход обусловлен тем, что использование неравномерной конечноэлементной сетки может привести к возникновению неконтролируемой погрешности и тем самым снизить достоверность результатов решения задачи. Для оценки сходимости решения рассмотрен вариант с $H = W$, $a = 0.5W$. При этом число элементов в горизонтальном и вертикальном направлениях одинаково и равно n . В таблице 1 представлены результаты расчетов безразмерного коэффициента интенсивности напряжений $K_I^* = K_I/(q\sqrt{\pi a})$, безразмерного Т-напряжения $T^* = T/q$ и двухосевого отношения (7) в зависимости от числа конечных элементов n . Индекс I соответствует выбору координатных

функций, ответственных за сингулярность, в виде (5), а индекс II соответствует выбору в виде (31).

n		6	10	20	50	100	150	200
K_I^*	I	1.335	1.337	1.336	1.335	1.335	1.334	1.334
	II	1.337	1.337	1.336	1.335	1.335	1.334	1.334
T^*	I	-1.345	-1.354	-1.362	-1.370	-1.375	-1.378	-1.380
	II	-1.443	-1.429	-1.416	-1.405	-1.400	-1.398	-1.398
B	I	-1.008	-1.013	-1.019	-1.026	-1.031	-1.033	-1.034
	II	-1.079	-1.069	-1.060	-1.052	-1.049	-1.048	-1.047

Таблица 1. Зависимость результатов расчетов от числа конечных элементов вдоль координатных осей

Для этой задачи Исида [7] получил $K_I^* = 1.334$, Ливерс и Радон [8] получили $B = -1.043$, Фетт [9] получил $T^* = -1.384$; $B = -1.038$. Результаты расчетов, приведенные в табл. 1, показывают хорошую сходимость решения с увеличением числа конечных элементов. Они удовлетворительно согласуются с результатами, полученными ранее другими исследователями. Поэтому при проведении расчетов, результаты которых приведены ниже, полагалось $n_1 = n_2 = n = 200$, а координатные функции, моделирующие сингулярность, брались в виде (31). При этом отличие результатов расчетов от результатов, полученных на сетке с $n = 150$, составляет менее 0.01%. Результаты расчетов величины K_I^* для различных длин трещины и для различных отношений H/W представлены в таблице 2. В ней курсивом показаны результаты Икиды [7]. В таблице 3 даны соответствующие значения параметра B . Курсивом показаны результаты Фетта [9]. Данные этих таблиц демонстрируют приемлемое согласие полученных результатов с результатами предшествующих исследований.

a/W	$H/W=0.5$	$H/W=1.0$	$H/W=1.5$	$H/W=2.0$
0.1	1.046 (1.046)	1.014 (1.014)	1.007 (1.007)	1.006
0.2	1.175 (1.175)	1.056 (1.055)	1.029 (1.029)	1.025
0.3	1.372 (1.371)	1.124 (1.123)	1.066 (1.066)	1.059
0.4	1.631 (1.629)	1.216 (1.216)	1.122 (1.122)	1.110
0.5	1.969 (1.967)	1.334 (1.334)	1.203 (1.203)	1.188
0.6	2.426 (2.424)	1.481 (1.481)	1.321 (1.32)	1.304
0.7	3.040 (3.04)	1.678 (1.68)	1.505	1.489
0.8	3.770	1.991	1.830	1.816
0.9	4.487	2.709	2.586	2.576

Таблица 2. Зависимость величины K_I^* от длины трещины и отношения длин сторон прямоугольной области с центральной трещиной

a/W	$H/W=0.5$	$H/W=1.0$	$H/W=1.5$	$H/W=2.0$
0.1	-1.003 (-1.001)	-1.006 (-1.007)	-1.003	-1.002
0.2	-0.9817 (0.975)	-1.018 (-1.017)	-1.010	-1.006
0.3	-0.9060 (-0.892)	-1.032 (-1.028)	-1.021	-1.015
0.4	-0.7861 (-0.763)	-1.042 (-1.037)	-1.037	-1.031
0.5	-0.6585 (-0.626)	-1.047 (-1.038)	-1.064	-1.061
0.6	-0.5560 (-0.519)	-1.058 (-1.045)	-1.113	-1.115
0.7	-0.4852 (-0.440)	-1.103 (-1.092)	-1.204	-1.213
0.8	-0.4422 (-0.387)	-1.255 (-1.207)	-1.394	-1.407
0.9	-0.6475 (-0.632)	-1.742 (-1.581)	-1.876	-1.890

Таблица 3. Зависимость двухосевого отношения V от длины трещины и отношения длин сторон прямоугольной области с центральной трещиной

Заключение. Приложенный метод объединяет в себе классические подходы—метод конечных элементов и метод Ритца—Галеркина. Благодаря такому сочетанию удастся адекватно воспроизвести сингулярные компоненты тензора напряжений. Существенным преимуществом методики выступает ее универсальность: она допускает применение конечных элементов произвольного типа—никаких жестких ограничений на их форму или характеристики не накладывается.

В настоящей статье рассмотрена классическая задача вычислительной механики разрушения—задача о центральной трещине в прямоугольной области. Цель этого—в наиболее ясном изложении сути метода и демонстрации его эффективности. Метод несложно обобщить на несимметричные задачи механики разрушения. Более того, его можно применять к решению задач теории упругости для областей с концентраторами напряжений при условии, что известно аналитическое решение задачи для бесконечной области. Это решение включается в набор координатных функций численного решения. Конечность области фактически учитывается конечными элементами, как это сделано при решении рассмотренной задачи. Можно отметить также простоту метода, что особенно важно для технических приложений.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. И. М. Лавит написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, О. С. Перова обзор литературы по теме статьи, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. I. M. Lavit writing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript, O. S. Perova reviewing the literature on the topic of the article, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gupta M., Alderliesten R. C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // Eng. Fract. Mech. 2015. Vol. 134. P. 218–241.
2. Матвиенко Ю. Г. Модели и критерии механики разрушения. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 521 с.
4. Brenner S. C., Scott L. R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. N.Y.: Springer, 2008. 397 p.
5. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
6. Тимошенко С. П., Гудьер Д. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
7. Под ред. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. М.: Мир, 1990. 448 с.
8. Leever P. S., Radon J. C. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries // Int. J. Fract. 1982. Vol. 19. P. 311–325.
9. Fett T. T-stresses in rectangular plates and circular disks // Eng. Fract. Mech. 1998. Vol. 60. P. 631–652.

REFERENCES

1. Gupta M., Alderliesten R. C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // Eng. Fract. Mech. 2015. Vol. 134. P. 218–241.
2. Matvienko Y. G. Models and criteria of fracture mechanics. M.: Fizmatlit, 2006. 328 p. (in Russian).
3. Zenkiewicz O. The finite element method in engineering. M.: Mir, 1975. 521 p. (in Russian).
4. Brenner S. C., Scott L. R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. N.Y.: Springer, 2008. 397 p.
5. Cherepanov G. P. Mechanics of brittle fracture. M.: Science, 1974. 640 p. (in Russian).
6. Timoshenko S. P., Gudyer J. Theory of elasticity. M.: Science, 1975. 576 p. (in Russian).
7. Edited by Murakami Y. Handbook of stress intensity coefficients. M.: Mir, 1990. 448 p. (in Russian).
8. Leever P. S., Radon J. C. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries // Int. J. Fract. 1982. Vol. 19. P. 311–325.
9. Fett T. T-stresses in rectangular plates and circular disks // Eng. Fract. Mech. 1998. Vol. 60. P. 631–652.