

А. С. Бегун

КОНЕЧНЫЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ НЕСЖИМАЕМОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

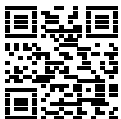
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия

Владивостокский государственный университет, Владивосток, Россия

Аннотация. Рассматривается деформирование несжимаемой упругопластической пластины в условиях цилиндрического изгиба. Для математического моделирования используется модель больших упругопластических деформаций. В условиях плоской деформации при возрастающем изгибающем моменте исследуется сначала чисто упругое деформирование, затем деформирование при наличии областей пластического течения. Считается, что в процессе деформирования каждая линия в поперечном сечении пластины переходит в соответствующую дугу окружности. Для описания исходного недеформированного и текущего деформированного состояний пластины используются декартова прямоугольная и цилиндрическая системы координат соответственно. Найдены условия начала пластического течения и закономерности его развития. Получены распределения напряжений и деформаций в пластине.

Ключевые слова: большие деформации, цилиндрический изгиб, упругопластический материал.

Бегун Александра Сергеевна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории механики деформируемого твердого тела, доцент кафедры математики и моделирования; e-mail: asustinova@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4067-9161>; AuthorID: 162735



для цитирования: Бегун А. С. Конечный цилиндрический изгиб несжимаемой упругопластической пластины // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 132–141. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.009. EDN: GEUNBR

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

A. S. Begun

FINITE BENDING OF AN INCOMPRESSIBLE ELASTIC-PLASTIC BLOCK

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences Vladivostok, Russia

Vladivostok State University, Vladivostok, Russia

Abstract. This article examines the deformation of an incompressible elastoplastic plate under cylindrical bending. A large elastoplastic deformation model is used for mathematical modeling. Under plane strain conditions with monotonically increasing bending moment, purely elastic deformation is first investigated, followed by deformation in the presence of regions of plastic flow. It is assumed that during deformation, each line in the plate's cross-section transforms into a corresponding circular arc. Cartesian rectangular and cylindrical coordinate systems are used to describe the initial undeformed and current deformed states of the plate, respectively. The conditions for the onset of plastic flow and the patterns of its development are determined. Stress and strain distributions in the plate are obtained.

Keywords: large strains, cylindrical bending, elastic-plastic material.

Aleksandra S. Begun, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher at the Laboratory of Mechanics of Deformable Solids, Associate Professor at the Department of Mathematics and Modeling; e-mail: asustinova@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4067-9161>; AuthorID: 162735



to cite this article: Begun A. S. Finite bending of an incompressible elastic-plastic block // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 132–141. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.009

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Изгиб упругопластической пластины представляет теоретический и практический интерес, поэтому рассматривался неоднократно, например [1—10]. Классические решения основаны на теории Кирхгофа-Лява и описывают поведение пластин при малых перемещениях и деформациях. Однако современные технологии требуют расчета, учитывающего большие деформации, как обратимые, так и необратимые. Решения для чисто упругого конечного изгиба в условиях плоского деформированного состояния представлены в [4, 7]. Жесткопластический изгиб рассматривался в [6]. В работе [3] получены решения для изгиба упругопластических пластин в рамках эйлеровой модели конечных деформаций, основанной на логарифмической скорости. В [1] представлен обзор решений для жесткопластических и упругопластических материалов, а также экспериментальных работ. В настоящей работе цилиндрический изгиб исследуется в рамках модели больших упругопластических деформаций, предложенной в [11].

1. Модельные соотношения. Для описания процесса деформирования будем использовать модель больших деформаций [11]. В эйлеровой системе координат обратимые и необратимые деформации определяются дифференциальными уравнениями переноса:

$$\begin{aligned}
 d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}, \\
 \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj})), \\
 \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\
 \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad r_{ij} = w_{ij} + z_{ij}(e_{ij}, \varepsilon_{ij}), \quad w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где u_i и v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды, d_{ij} , e_{ij} , p_{ij} — компоненты тензоров полных, обратимых и пластических деформаций соответственно, r_{ij} — тензор вращений, ε_{ij} и γ_{ij} — компоненты скоростей полных и пластических деформаций.

Считаем, что напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями, и связаны зависимостями:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}) \quad \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0, \\
 \sigma_{ij} &= -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \quad \text{при} \quad p_{ij} \neq 0, \\
 W &= (a - \mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - \kappa J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \dots, \\
 J_k &= \begin{cases} L_k, & \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0 \\ I_k, & \text{при} \quad p_{ij} \neq 0 \end{cases}, \quad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}, \\
 I_1 &= e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns},
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, p_1 – добавочное гидростатическое давление, $W = W(e_{ij})$ – упругий потенциал (плотность распределения свободной энергии), μ – модуль сдвига исследуемого материала, a , b , κ , χ – упругие модули более высокого порядка.

Связь скоростей пластических деформаций ε_{ij}^p с напряжениями в условиях принимаемого принципа максимума Мизеса устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0. \tag{3}$$

В качестве условия пластичности будем использовать условие Треска

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k, \tag{4}$$

где σ_i , ε_k^p – главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, k – предел текучести.

2. Постановка задачи, основные кинематические соотношения.

Пусть в недеформированном состоянии прямоугольная пластина толщиной h и длиной $2l$ занимает область $-h/2 \leq x_1 \leq h/2$, $-l \leq x_2 \leq l$, $-b \leq x_3 \leq b$ (рис. 1). Считаем, что под действием приложенного изгибающего момента $M = M(t)$ пластина деформируется так, что плоскости $x_1 = \text{const}$, переходят в сектора цилиндрических поверхностей $r = \text{const}$, а плоскости $x_2 = \text{const}$ в плоскости $\theta = \text{const}$. Внутренняя и внешняя поверхности предполагаются свободными от напряжений $\sigma_{rr}(r_1) = \sigma_{rr}(r_2) = 0$

Начальные (x_1, x_2, x_3) и текущие (y_1, y_2, y_3) координаты точки среды связаны формулами:

$$y_1 = r(x_1) \cos \theta(x_2) - R^*, \quad y_2 = r(x_1) \sin \theta(x_2), \quad y_3 = x_3. \tag{5}$$

Используя условие несжимаемости найдем

$$r = \sqrt{R^2 + 2x_1 r_*}, \quad \theta = \frac{x_2}{r_*}, \quad r' = \frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{r_*}{r}, \quad \theta' = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{1}{r_*} \tag{6}$$

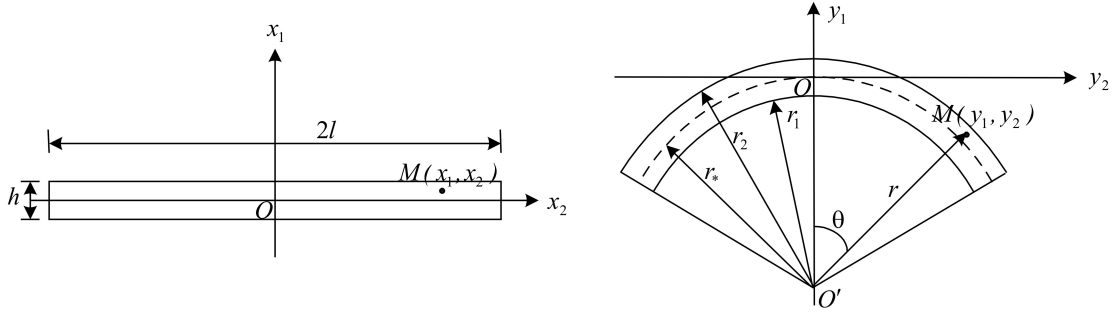


Рис. 1. Недеформированное и деформированное состояние прямоугольной пластины при изгибе.

Если e_1, e_2, e_3 — базисные вектора исходной декартовой системы координат, а e_r, e_φ, e_z — базисные вектора текущей цилиндрической системы координат, тогда для тензора градиента деформаций $\mathbf{F}$ и тензора деформаций Альманси $\mathbf{d}$ получим соотношения

$$\mathbf{F} = r' e_r \otimes e_1 + r \theta' e_\varphi \otimes e_2, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{r_*} \right)^2 \right) e_r \otimes e_r + \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{r_*}{r} \right)^2 \right) e_\varphi \otimes e_\varphi. \quad (7)$$

Тензор градиента скоростей $\mathbf{L}$, тензор скоростей деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и тензор вращения $\boldsymbol{\omega}$ определяются следующими равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{\dot{r}'}{r'} e_r \otimes e_r - \dot{\theta}' e_r \otimes e_\varphi + \dot{\theta}' e_\varphi \otimes e_r - \frac{\dot{r}'}{r'} e_\varphi \otimes e_\varphi, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\dot{r}'}{r'} e_r \otimes e_r - \frac{\dot{r}'}{r'} e_\varphi \otimes e_\varphi, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}' e_r \otimes e_\varphi + \dot{\theta}' e_\varphi \otimes e_r. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и далее $(\cdot)$ — производная по времени.

3. Упругое деформирование. Считаем, что, до достижения изгибающим моментом M значения M_0 вся пластина деформируется обратимо. Отличные от нуля компоненты тензора напряжения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + a - \mu - (k + 3\chi)(d_{rr} + d_{\varphi\varphi}) - (k + 3\chi)(d_{rr}^2 + d_{\varphi\varphi}^2) + \\ &\quad + 2\mu d_{rr} - 2(k + 2b + 2a)d_{rr}^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + a - \mu - (k + 3\chi)(d_{rr} + d_{\varphi\varphi}) - (k + 3\chi)(d_{rr}^2 + d_{\varphi\varphi}^2) + \\ &\quad + 2\mu d_{\varphi\varphi} - 2(k + 2b + 2a)d_{\varphi\varphi}^2, \\ \sigma_{zz} &= -p + a - \mu + (2b - 3\chi)(d_{rr} + d_{\varphi\varphi}) - (k + 3\chi)(d_{rr}^2 + d_{\varphi\varphi}^2), \\ \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\mu(d_{rr} - d_{\varphi\varphi}) - 2(k + 2b + 2a)(d_{rr}^2 - d_{\varphi\varphi}^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Интегрируя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{r}, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

и считая, что внутренняя и внешняя поверхности свободны от напряжений ($\sigma_{rr}(r_1) = \sigma_{rr}(r_2) = 0$), найдем компоненты напряжений и изгибающий момент

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\mu}{2} \left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_*^2} + r_*^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \right) - \frac{k + 2b + 2a}{2} \left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_*^2} + r_*^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^4 - r_1^4}{4r_*^4} - \frac{r_*^4}{4} \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_1^4} \right) \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{rr} + \mu \left(\frac{r^2}{r_*^2} - \frac{r_*^2}{r^2} \right) - \frac{k + 2b + 2a}{2} \left(2 \frac{r^2}{r_*^2} - 2 \frac{r_*^2}{r^2} - \frac{r^4}{r_*^4} + \frac{r_*^4}{r^4} \right), \quad (11) \\ M &= \int_{r_1}^{r_2} r \sigma_{\varphi\varphi} dr = \frac{\mu}{2} \left(\frac{r_2^4 - r_1^4}{4r_*^2} + r_*^2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right) - \frac{k + 2b + 2a}{4} \left(\frac{r_2^4 - r_1^4}{2r_*^2} - 2r_*^2 \ln \frac{r_2}{r_1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_*^4}{2} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) - \frac{r_2^6 - r_1^6}{6r_*^4} \right), \quad r_*^2 = r_2 r_1. \end{aligned}$$

Задавая изгибающий момент и используя соотношение $r_*^2 = r_2 r_1$, получим уравнение для определения положения нейтральной линии r_*

$$\begin{aligned} &\frac{k + 2b + 2a}{4\mu} \left(\frac{1}{2} (1 - \tilde{r}_*^4) + 2\tilde{r}_*^2 \ln(\tilde{r}_*^2) + \frac{1}{6} \left(\tilde{r}_*^8 - \frac{1}{\tilde{r}_*^4} \right) - \frac{1}{2} \left(\tilde{r}_*^6 - \frac{1}{\tilde{r}_*^2} \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \left(\tilde{r}_*^6 - \frac{1}{\tilde{r}_*^2} \right) - \tilde{r}_*^2 \ln(\tilde{r}_*^2) \right) = \frac{M(t)}{r_1^2 \mu}, \quad \tilde{r}_* = \frac{r_*}{r_1}. \end{aligned}$$

Далее находятся внутренняя r_1 и внешняя r_2 цилиндрические поверхности. Деформации и напряжения находятся из соотношений (7) и (9) соответственно.

Условие пластичности в рассматриваемом случае записывается в виде

$$|\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}| = 2k.$$

Согласно выведенным соотношениям, напряженное состояние достигнет предела текучести одновременно на внутренней $r = r_1$ и внешней $r = r_2$ цилиндрической поверхности.

4. Пластическое течение. После того как изгибающий момент M достигнет значения M_0 , в пластине будут упругая область $r_1^p \leq r \leq r_2^p$ и две пластические области $r_2^p \leq r \leq r_2$ и $r_1 \leq r \leq r_1^p$, развивающиеся от внешней и внутренней границы соответственно. Интегрируя уравнения равновесия и используя граничные условия $\sigma_{rr}(r_1) = \sigma_{rr}(r_2) = 0$, в областях пластического течения найдем

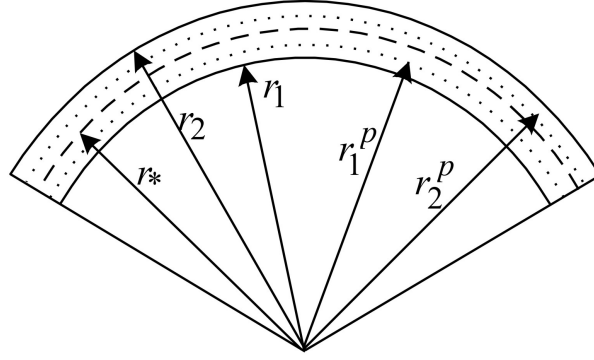


Рис. 2. Упругая и пластические области.

$$r_1 \leq r \leq r_1^p: \quad \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = -2k, \quad \sigma_{rr} = 2k \ln \frac{r_1}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \left(\ln \frac{r_1}{r} - 1 \right); \quad (12)$$

$$r_1^p \leq r \leq r_2: \quad \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = 2k, \quad \sigma_{rr} = 2k \ln \frac{r}{r_2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \left(\ln \frac{r}{r_2} + 1 \right).$$

Используя условие непрерывности напряжений на упругопластической границе $r = r_1^p$ в области обратимого деформирования $r_1^p \leq r \leq r_2^p$ имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & -\frac{k+2b+2a}{2} \left(\frac{r^2 - r_1^{p2}}{r_*^2} + r_*^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^{p2}} \right) - \frac{r^4 - r_1^{p4}}{4r_*^4} - \frac{r_*^4}{4} \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_1^{p4}} \right) \right) + \\ & + \frac{\mu}{2} \left(\frac{r^2 - r_1^{p2}}{r_*^2} + r_*^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^{p2}} \right) \right) + 2k \ln \frac{r_1}{r_1^p}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = & \sigma_{rr} + \mu \left(\frac{r^2}{r_*^2} - \frac{r_*^2}{r^2} \right) - \frac{k+2b+2a}{2} \left(2\frac{r^2}{r_*^2} - 2\frac{r_*^2}{r^2} - \frac{r^4}{r_*^4} + \frac{r_*^4}{r^4} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Изгибающий момент теперь можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} M = & \int_{r_1}^{r_2} r \sigma_{\varphi\varphi} dr = \int_{r_1}^{r_1^p} r \sigma_{\varphi\varphi} dr + \int_{r_1^p}^{r_2^p} r \sigma_{\varphi\varphi} dr + \int_{r_2^p}^{r_2} r \sigma_{\varphi\varphi} dr = \\ = & \frac{\mu}{2} \left(\frac{r_2^{p4} - r_1^{p4}}{4r_*^2} + r_*^2 \ln \frac{r_2^p}{r_1^p} \right) - \frac{k+2b+2a}{4} \left(\frac{r_2^{p4} - r_1^{p4}}{2r_*^2} - 2r_*^2 \ln \frac{r_2^p}{r_1^p} - \right. \\ & \left. - \frac{r_*^4}{2} \left(\frac{1}{r_2^{p2}} - \frac{1}{r_1^{p2}} \right) - \frac{r_2^{p6} - r_1^{p6}}{6r_*^4} \right) + k \left(\frac{r_2^2 - r_2^{p2} + r_1^2 - r_1^{p2}}{2} - r_2^{p2} \ln \frac{r_2^p}{r_2} - r_1^{p2} \ln \frac{r_1^p}{r_1} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Используя соотношения (14) и (13) и условие непрерывности напряжений на упругопластических границах, получим систему алгебраических уравнений

для определения положения нейтральной линии r_* , внутренней r_1 , внешней r_2 поверхностей и упругопластических границ r_1^p и r_2^p

$$\begin{aligned}
 M(t) = & \frac{\mu}{2} \left(\frac{r_2^{p4} - r_1^{p4}}{4r_*^2} + r_*^2 \ln \frac{r_2^p}{r_1^p} \right) - \frac{k + 2b + 2a}{4} \left(\frac{r_2^{p4} - r_1^{p4}}{2r_*^2} - 2r_*^2 \ln \frac{r_2^p}{r_1^p} - \right. \\
 & \left. - \frac{r_*^4}{2} \left(\frac{1}{r_2^{p2}} - \frac{1}{r_1^{p2}} \right) - \frac{r_2^{p6} - r_1^{p6}}{6r_*^4} \right) + k \left(\frac{r_2^2 - r_2^{p2} + r_1^2 - r_1^{p2}}{2} - r_2^{p2} \ln \frac{r_2^p}{r_2} - r_1^{p2} \ln \frac{r_1^p}{r_1} \right), \\
 & \mu \left(\frac{r_1^{p2}}{r_*^2} - \frac{r_*^2}{r_1^{p2}} \right) - \frac{k + 2b + 2a}{2} \left(2 \frac{r_1^{p2}}{r_*^2} - 2 \frac{r_*^2}{r_1^{p2}} - \frac{r_1^{p4}}{r_*^4} + \frac{r_*^4}{r_1^{p4}} \right) = -2k, \\
 & \mu \left(\frac{r_2^{p2}}{r_*^2} - \frac{r_*^2}{r_2^{p2}} \right) - \frac{k + 2b + 2a}{2} \left(2 \frac{r_2^{p2}}{r_*^2} - 2 \frac{r_*^2}{r_2^{p2}} - \frac{r_2^{p4}}{r_*^4} + \frac{r_*^4}{r_2^{p4}} \right) = 2k \\
 & - \frac{k + 2b + 2a}{2} \left(\frac{r_2^{p2} - r_1^{p2}}{r_*^2} + r_*^2 \left(\frac{1}{r_2^{p2}} - \frac{1}{r_1^{p2}} \right) - \frac{r_2^{p4} - r_1^{p4}}{4r_*^4} - \frac{r_*^4}{4} \left(\frac{1}{r_2^{p4}} - \frac{1}{r_1^{p4}} \right) \right) + \\
 & + \frac{\mu}{2} \left(\frac{r_2^{p2} - r_1^{p2}}{r_*^2} + r_*^2 \left(\frac{1}{r_2^{p2}} - \frac{1}{r_1^{p2}} \right) \right) = 2k \ln \frac{r_2 r_1^p}{r_1 r_2^p}, \quad r_2^2 - r_1^2 = 2hr_*.
 \end{aligned}$$

Далее находим компоненты тензора напряжений и тензора деформаций Альманси. В упругой области $r_1^p \leq r \leq r_2^p$ для компонент обратимых деформаций справедливы формулы

$$e_{rr} = 1 - \sqrt{1 - 2d_{rr}} = 1 - \frac{r}{r_*}, \quad e_{\varphi\varphi} = 1 - \sqrt{1 - 2d_{\varphi\varphi}} = 1 - \frac{r_*}{r}. \quad (15)$$

На рис.3 показано изменение упругопластических границ и нейтральной линии.

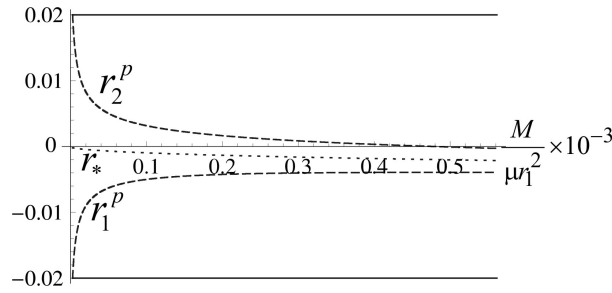


Рис. 3. Изменение упругопластических границ и нейтральной линии.

В областях пластического течения обратимые деформации не изменяются и равны в каждой точке значению в тот момент времени, когда до нее дошла упругопластическая граница. Компоненты пластических деформаций через полные

и обратимые деформации находятся по формулам

$$p_{rr} = \frac{1}{2} - \frac{1 - 2d_{rr}}{2(e_{rr} - 1)^2}, \quad p_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} - \frac{1 - 2d_{\varphi\varphi}}{2(e_{\varphi\varphi} - 1)^2}. \quad (16)$$

5. Заключение. В рамках модели больших упругопластических деформаций получено решение о цилиндрическом изгибе прямоугольной пластины. Найдены условия зарождения и продвижения упругопластических границ. Рассчитаны поля напряжений и полных, обратимых и необратимых деформаций. Представленное решение может в дальнейшем использоваться для задачи разгрузки пластины при постепенном уменьшении изгибающего момента.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (тема № FWFW-2021-0005).

ADDITIONAL INFORMATION

Competing interests. The author declare that they have no competing interests.

Funding. The research was carried out within the state assignment of IACP FEB RAS (Theme № FWFW-2021-0005) .

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexandrov S., Lyamina E., Hwang Y.-M. Plastic Bending at Large Strain: A Review // Processes. 2021. Т. 9, № 3. С. 406. DOI: 10.3390/pr9030406.
2. Arslan E., Eraslan A. N. Analytical solution to the bending of a nonlinearly hardening wide curved bar // Acta Mechanica. 2010. Т. 210, № 1. С. 71–84. DOI: 10.1007/s00707-009-0195-y.
3. Bruhns O. T., Gupta N. K., Meyers A. T. M., Xiao H. Bending of an elastoplastic strip with isotropic and kinematic hardening // Archive of Applied Mechanics. 2003. Т. 72. С. 759–778. DOI: 10.1007/s00419-002-0273-2.
4. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
5. Dadras P. Plane strain elastic-plastic bending of a strain hardening curved beam // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. Т. 43, № 1. С. 39–56. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00104-4.
6. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, UK: Clarendon Press, 1950.
7. Kassianidid F., Ogden R. On large bending deformations of transversely isotropic rectangular elastic blocks // Note di Matematica. 2007. Т. 27, № 2. С. 131–154. DOI: 10.1285/i15900932v27n2p131.
8. Rivlin R. S. Large elastic deformations of isotropic materials – V: The problem of flexure // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1949. Т. 195. С. 463–473. DOI: 10.1098/rspa.1949.0004.
9. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970.
10. Yu T. X., Zhang L. C. Plastic Bending: Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 1996. DOI: 10.1142/2754.

11. Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Доклады Академии наук. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.

REFERENCES

1. Alexandrov S., Lyamina E., Hwang Y.-M. Plastic Bending at Large Strain: A Review // Processes. 2021. Vol. 9, no. 3. P. 406. DOI: 10.3390/pr9030406.
2. Arslan E., Eraslan A. N. Analytical solution to the bending of a nonlinearly hardening wide curved bar // Acta Mechanica. 2010. Vol. 210, no. 1. P. 71–84. DOI: 10.1007/s00707-009-0195-y.
3. Bruhns O. T., Gupta N. K., Meyers A. T. M., Xiao H. Bending of an elastoplastic strip with isotropic and kinematic hardening // Archive of Applied Mechanics. 2003. Vol. 72. P. 759–778. DOI: 10.1007/s00419-002-0273-2.
4. Chernykh K. F. Nonlinear Theory of Elasticity in Mechanical Engineering Calculations. L.: Mechanical Engineering, 1986. 336 p.
5. Dadras P. Plane strain elastic-plastic bending of a strain hardening curved beam // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. Vol. 43, no. 1. P. 39–56. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00104-4.
6. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, UK: Clarendon Press, 1950.
7. Kassianidid F., Ogden R. On large bending deformations of transversely isotropic rectangular elastic blocks // Note di Matematica. 2007. Vol. 27, no. 2. P. 131–154. DOI: 10.1285/i15900932v27n2p131.
8. Rivlin R. S. Large elastic deformations of isotropic materials – V: The problem of flexure // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1949. Vol. 195. P. 463–473. DOI: 10.1098/rspa.1949.0004.
9. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970.
10. Yu T. X., Zhang L. C. Plastic Bending: Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 1996. DOI: 10.1142/2754.
11. Burenin A., Bykovtsev G., Kovtanyuk L. A simple model of finite strain in an elastoplastic medium // Doklady Physics. 1996. Vol. 41, no. 3. P. 127–129.