

М. Н. Михин

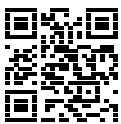
О ПРИВЕДЕНИИ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ ГЕМИТРОПНЫХ ТЕЛ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ МЕТОДОМ ЯКОБИ

*Филиал Российского государственного гуманитарного университета, Домодедово,
Россия*

Аннотация. Гемитропные тела представляют собой класс микрополярных сред, характеризующийся инвариантностью определяющих тензоров относительно произвольных поворотов и изменением при зеркальных отражениях пространства. Приведение квадратичной формы энергии деформации таких материалов к каноническому виду является необходимой задачей для анализа устойчивости, идентификации материальных параметров и построения эффективных вычислительных моделей в механике деформируемого твердого тела. Исследование выполнено в рамках линейной теории микрополярной упругости. Используется аппарат линейной алгебры и теории квадратичных форм. Приведение квадратичной формы энергии деформации к каноническому виду осуществляется методом Якоби, основанным на вычислении угловых миноров матрицы квадратичной формы. Положительная определенность энергии деформации проверяется посредством критерия Сильвестра. Сформулирована система определяющих неравенств для девяти материальных констант, обеспечивающих положительную определенность энергии деформации. Показано, что метод Якоби позволяет объединить процедуру приведения квадратичной формы с проверкой физической корректности материала по критерию Сильвестра.

Ключевые слова: микрополярная упругость, гемитропные тела, квадратичная форма, канонический вид, метод Якоби, критерий Сильвестра, положительная определенность, определяющие неравенства

Михин Михаил Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математических и естественнонаучных дисциплин; e-mail: mmikhin@inbox.ru; <https://orcid.org/0009-0007-2081-3462>; AuthorID: 493518



для цитирования: Михин М. Н. О приведении энергии деформации гемитропных тел к каноническому виду методом Якоби // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 142–155. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.001. EDN: IHLIMK

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

M. N. Mikhin

ON THE REDUCTION OF THE STRAIN ENERGY OF HEMITROPIC SOLIDS TO CANONICAL FORM BY THE JACOBI METHOD

Russian State University for the Humanities, Domodedovo, Russia

Abstract. Hemitropic solids are a class of micropolar media whose constitutive tensors are invariant under arbitrary rotations but vary under spatial mirror reflections. Reducing the strain energy quadratic form of such materials to its canonical form is a necessary task for stability analysis, material parameter identification, and constructing efficient computational models in solid mechanics. The present study is conducted within the linear theory of micropolar elasticity. The tools of linear algebra and the theory of quadratic forms are employed. The reduction of the quadratic form of the strain energy to its canonical form is performed using Jacobi's method, which is based on the computation of the leading principal minors of the quadratic form matrix. Positive definiteness of the strain energy is verified via Sylvester's criterion. A system of constitutive inequalities for nine material constants that guarantee positive definiteness of the strain energy is formulated. It is shown that Jacobi's method enables the reduction of the quadratic form to be combined with the verification of the material's physical admissibility via Sylvester's criterion.

Keywords: micropolar elasticity, hemitropic solids, quadratic form, canonical form, Jacobi's method, Sylvester's criterion, positive definiteness, constitutive inequalities.

Mikhail N. Mikhin, Cand. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Head of the Department of Mathematics and Natural Sciences e-mail: mmikhin@inbox.ru; <https://orcid.org/0009-0007-2081-3462>; AuthorID: 493518



to cite this article: Mikhin M.N. On the reduction of the strain energy of hemitropic solids to canonical form by the Jacobi method // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 142–155. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.001

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Теория микрополярной упругости описывает материалы с внутренней структурой, в которых каждая материальная точка обладает не только тремя трансляционными перемещениями, но и тремя спинорными перемещениями (микроповоротами). Среди микрополярных сред особый класс составляют гемитропные тела, характеризующиеся тем, что компоненты его определяющих тензоров инвариантны при любых поворотах, но изменяются при зеркальных отражения пространства. Построение математической модели механического поведения микрополярных упругих тел традиционно опирается на задание энергии деформации, которая полностью определяет упругие свойства материала в рамках линейной постановки [1–5].

Среди существующих методов приведения квадратичных форм к каноническому виду (метод Лагранжа, метод ортогональных преобразований, метод Якоби) особое место занимает метод Якоби, основанный на вычислении угловых миноров матрицы квадратичной формы. Этот метод обладает рядом достоинств: 1) коэффициенты d_i ($i = 1, \dots, 18$) канонического вида вычисляются с помощью явных формул; 2) преобразование к новым переменным имеет верхнетреугольный вид: каждая новая переменная равна сумме соответствующей исходной переменной и линейной комбинации последующих исходных переменных.

Физическая реализуемость гемитропного тела требует положительной определенности энергии деформации. Для симметричной матрицы квадратичной формы это условие эквивалентно критерию Сильвестра, согласно которому все угловые миноры должны быть положительными. Метод Якоби естественным образом, оперирующий угловыми минорами, что позволяет объединить процедуру приведения квадратичной формы с проверкой физической корректности материала.

Скажем несколько слов о содержании работы. После вводного раздела рассматриваются энергия деформации для гемитропных тел. В рамках А-представления энергии деформации вводится вспомогательный 18-мерный вектор формальных переменных, который посредством линейного невырожденного преобразования переведен в новый канонический вектор.

В третьем разделе работы излагается метод Якоби диагонализации квадратичной формы. Приводятся явные выражения коэффициентов канонического вида через угловые миноры, описывается алгоритм построения преобразования Якоби невырожденной верхнетреугольной замены переменных, а также рассматриваются вычислительные особенности метода применительно к форме от 18 переменных.

В четвертом разделе формулируется система определяющих неравенств для гемитропных тел. Выводятся условия положительной определенности через угловые миноры, которые конкретизируются в виде неравенств на механические модули.

В заключительной части статьи представлены обсуждение результатов и выводы.

2. Энергия деформации гемитропного тела. Гемитропное (гиротропное) микрополярное тело характеризуется тем, что компоненты его определяющих тензоров инвариантны при любых поворотах, но изменяются при зеркальных отражениях пространства. В рамках микрополярной теории основными кинематическими величинами являются трансляционные u_j и спинорные ϕ_k перемещения.

В терминах трансляционных и спинорных перемещений асимметричный тензор деформаций и асимметричный тензор изгиба-кручения записываются следующим образом:

$$\epsilon_{ij} = \partial_i u_j - e_{ijk} \phi_k, \quad \kappa_{is} = \partial_i \phi_s,$$

где e_{ijk} — альтернируемый тензор (символ Леви-Чивиты), ∂_j — частная производная по пространственной координате x_j .

Через асимметричный тензор деформаций и асимметричный тензор изгиба-кручения выражения для вектора относительного микровращения и вектора сопутствующего антисимметричной части тензора изгиба-кручения можно представить в виде

$$\varphi_k = \phi_k - \frac{1}{2} e_{kij} \partial_i u_j, \quad \kappa_i = \frac{1}{2} e_{ijs} \kappa_{[js]}.$$

В принятых обозначениях квадратные скобки обозначают операцию кососимметризации (альтернирования) по индексам, заключенным в них, а круглые скобки означают симметризацию по индексам, находящимся внутри них.

Введем энергию деформации $\mathcal{U}$ [5, 6]:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{(ij)}, \kappa_{(ij)}, \varphi_i, \kappa_i), \quad (1)$$

где

$$\varepsilon_{(ij)} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad \kappa_{(ij)} = \frac{1}{2}(\partial_i \kappa_j + \partial_j \kappa_i).$$

А-представление энергии деформации (1) в декартовой системе координат примет вид [5]

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & A_1 \delta_{is} \delta_{lm} \varepsilon_{(is)} \varepsilon_{(lm)} + A_2 \delta_{is} \delta_{lm} \kappa_{(is)} \kappa_{(lm)} + A_3 \delta_{is} \delta_{lm} \varepsilon_{(il)} \varepsilon_{(sm)} + \\ & + A_4 \delta_{is} \delta_{lm} \kappa_{(il)} \kappa_{(sm)} + A_5 \delta_{is} \varphi_i \varphi_s + A_6 \delta_{is} \kappa_i \kappa_s + \\ & + A_7 \delta_{is} \delta_{lm} \varepsilon_{(is)} \kappa_{(lm)} + A_8 \varepsilon_{(is)} \kappa_{(is)} + A_9 \kappa_i \varphi_i, \end{aligned} \quad (2)$$

где δ_{is} — символ Кронекера, A_τ ($\tau = 1, \dots, 9$) — определяющие механические модули микрополярной среды.

Для обеспечения единообразия при использовании алгебраических алгоритмов диагонализации выполняется формальная замена независимых переменных

энергии деформации $\mathcal{U}$ в соответствии со следующими правилами:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{(11)} &= Y_1, \quad \kappa_{(11)} = Y_7, \quad \varphi_1 = Y_{\underline{13}}, \\
 \varepsilon_{(22)} &= Y_2, \quad \kappa_{(22)} = Y_8, \quad \varphi_2 = Y_{\underline{14}}, \\
 \varepsilon_{(33)} &= Y_3, \quad \kappa_{(33)} = Y_9, \quad \varphi_3 = Y_{\underline{15}}, \\
 \varepsilon_{(23)} &= Y_4, \quad \kappa_{(23)} = Y_{\underline{10}}, \quad \kappa_1 = Y_{\underline{16}}, \\
 \varepsilon_{(13)} &= Y_5, \quad \kappa_{(13)} = Y_{\underline{11}}, \quad \kappa_2 = Y_{\underline{17}}, \\
 \varepsilon_{(12)} &= Y_6, \quad \kappa_{(12)} = Y_{\underline{12}}, \quad \kappa_3 = Y_{\underline{18}},
 \end{aligned} \tag{3}$$

где для того чтобы отличить двузначный индекс, состоящий из двух цифр, от однозначных индексов, идущих подряд, двузначный индекс выделяется подчеркиванием.

После выполнения замен (3) квадратичная форма энергии деформации (2) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} = & (A + A)Y_1^2 + 2AY_1Y_2 + 2AY_1Y_3 + (A + A)Y_1Y_7 + AY_1Y_8 + AY_1Y_9 + \\
 & + (A + A)Y_2^2 + 2AY_2Y_3 + AY_2Y_7 + (A + A)Y_2Y_8 + AY_2Y_9 + \\
 & + (A + A)Y_3^2 + AY_3Y_7 + AY_3Y_8 + (A + A)Y_3Y_9 + 2AY_4^2 + 2AY_4Y_{\underline{10}} + \\
 & + 2AY_5^2 + 2AY_5Y_{\underline{11}} + 2AY_6^2 + 2AY_6Y_{\underline{12}} + (A + A)Y_7^2 + 2AY_7Y_8 + \\
 & + 2AY_7Y_9 + (A + A)Y_8^2 + 2AY_8Y_9 + (A + A)Y_9^2 + 2AY_{\underline{10}}^2 + 2AY_{\underline{11}}^2 + \\
 & + 2AY_{\underline{12}}^2 + AY_{\underline{13}}^2 + AY_{\underline{13}}Y_{\underline{16}} + AY_{\underline{14}}^2 + AY_{\underline{14}}Y_{\underline{17}} + AY_{\underline{15}}^2 + \\
 & + AY_{\underline{15}}Y_{\underline{18}} + AY_{\underline{16}}^2 + AY_{\underline{17}}^2 + AY_{\underline{18}}^2.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, построена квадратичная форма 18 переменных, которая может быть записана в матричной форме:

$$\mathcal{U} = [Y]^T [A] [Y],$$

где

$$[Y] = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, Y_8, Y_9, Y_{\underline{10}}, Y_{\underline{11}}, Y_{\underline{12}}, Y_{\underline{13}}, Y_{\underline{14}}, Y_{\underline{15}}, Y_{\underline{16}}, Y_{\underline{17}}, Y_{\underline{18}}]^T$$

— транспонированная вектор-строка, составленная из формальных переменных, $[A]$ — симметричная матрица квадратичной формы, элементами которой являются механические модули микрополярной среды.

Симметричную матрицу $[A]$ квадратичной формы можно представить в следующем блочном виде:

$$[A] = \begin{pmatrix} [A_{11}] & 0 & [A_{13}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [A_{22}] & 0 & [A_{24}] & 0 & 0 \\ [A_{31}] & 0 & [A_{33}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [A_{42}] & 0 & [A_{44}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [A_{55}] & [A_{56}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [A_{65}] & [A_{66}] \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
 [A_{11}] &= \begin{bmatrix} A_1 + A_3 & A_1 & A_1 \\ A_1 & A_1 + A_3 & A_1 \\ A_1 & A_1 & A_1 + A_3 \end{bmatrix}, \\
 [A_{13}] = [A_{31}] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_7 + A_8 & A_7 & A_7 \\ A_7 & A_7 + A_8 & A_7 \\ A_7 & A_7 & A_7 + A_8 \end{bmatrix}, \\
 [A_{22}] &= 2 \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}, \quad [A_{24}] = \begin{bmatrix} A_8 & 0 & 0 \\ 0 & A_8 & 0 \\ 0 & 0 & A_8 \end{bmatrix}, \\
 [A_{44}] &= 2 \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 \end{bmatrix}, \quad [A_{33}] = \begin{bmatrix} A_2 + A_4 & A_2 & A_2 \\ A_2 & A_2 + A_4 & A_2 \\ A_2 & A_2 & A_2 + A_4 \end{bmatrix}, \\
 [A_{56}] = [A_{65}] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_9 & 0 & 0 \\ 0 & A_9 & 0 \\ 0 & 0 & A_9 \end{bmatrix}, \\
 [A_{55}] &= \begin{bmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & A_5 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 \end{bmatrix}, \quad [A_{66}] = \begin{bmatrix} A_6 & 0 & 0 \\ 0 & A_6 & 0 \\ 0 & 0 & A_6 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

3. Диагонализация энергии деформации методом Якоби. Рассмотрим процесс приведения квадратичной формы к каноническому виду с использованием одного из основных методов линейной алгебры — метод Якоби (метод треугольного преобразования). Приведем энергию деформации к каноническому (или диагональному) виду, используя один из основных методов линейной алгебры — метод Якоби [7–9].

Метод Якоби применим, если все угловые миноры матрицы $[A]$ квадратичной формы отличны от нуля:

$$\Delta_1 \neq 0, \quad \Delta_2 \neq 0, \quad \dots, \quad \Delta_{18} \neq 0. \quad (5)$$

В дальнейшем будет рассмотрен частный случай

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_{18} > 0. \quad (6)$$

В этом случае существует единственное невырожденное линейное преобразование переменных вида:

$$\begin{cases} Y_1 &= X_1 + c_{12}X_2 + c_{13}X_3 + \dots + c_{1\overline{18}}X_{\overline{18}}, \\ Y_2 &= X_2 + c_{23}X_3 + \dots + c_{2\overline{18}}X_{\overline{18}}, \\ Y_3 &= X_3 + \dots + c_{3\overline{18}}X_{\overline{18}}, \\ \vdots & \\ Y_{\overline{18}} &= X_{\overline{18}}, \end{cases} \quad (7)$$

приводящее рассматриваемую квадратичную форму к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{18} d_i X_i^2, \quad (8)$$

где

$$d_1 = \Delta_1, \quad d_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}, \quad j = 2, \dots, 18. \quad (9)$$

Для коэффициентов c_{ij} ($i < j$) этого преобразования справедлива следующая формула [7, 9]:

$$c_{ij} = \frac{A_{ji}^{(j)}}{\Delta_{j-1}}, \quad (10)$$

где $A_{ji}^{(j)}$ — алгебраическое дополнение к элементу a_{ji} в матрице, составленной из первых j строк и j столбцов матрицы $[A]$.

Перейдем к непосредственной диагонализации энергии деформации $\mathcal{U}(Y_1, \dots, Y_{\overline{18}})$. Последовательно вычисляем все 18 угловых миноров матрицы $[A]$:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= A + \underset{1}{A}, \quad \Delta_2 = \underset{3}{A} (2\underset{1}{A} + \underset{3}{A}), \quad \Delta_3 = \underset{3}{A}^2 (3\underset{1}{A} + \underset{3}{A}), \\ \Delta_4 &= 2\underset{3}{A}^3 (3\underset{1}{A} + \underset{3}{A}), \quad \Delta_5 = 4\underset{3}{A}^4 (3\underset{1}{A} + \underset{3}{A}), \quad \Delta_6 = 8\underset{3}{A}^5 (3\underset{1}{A} + \underset{3}{A}), \\ \Delta_7 &= 2\underset{3}{A}^4 [4\underset{3}{A} (3\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) (\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - \underset{8}{A}^2 (2\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) - \underset{3}{A} \underset{7}{A} (3\underset{7}{A} + 2\underset{8}{A})], \\ \Delta_8 &= \frac{1}{2} \underset{3}{A}^3 (4\underset{3}{A} \underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2) [4\underset{3}{A} (3\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) (2\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - \underset{8}{A}^2 (\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) - 2\underset{3}{A} \underset{7}{A} (3\underset{7}{A} + 2\underset{8}{A})], \\ \Delta_9 &= \frac{1}{8} \underset{3}{A}^3 (4\underset{3}{A} \underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)^2 [4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) (3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2], \\ \Delta_{10} &= \frac{1}{16} \underset{3}{A}^2 (4\underset{3}{A} \underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)^3 [4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) (3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2], \\ \Delta_{11} &= \frac{1}{32} \underset{3}{A} (4\underset{3}{A} \underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)^4 [4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) (3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2], \\ \Delta_{12} &= \frac{1}{64} (4\underset{3}{A} \underset{4}{A} - \underset{8}{A}^2)^5 [4(3\underset{1}{A} + \underset{3}{A}) (3\underset{2}{A} + \underset{4}{A}) - (3\underset{7}{A} + \underset{8}{A})^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{13} &= \frac{1}{64} A (4AA - A^2)^5 [4(3A + A)(3A + A) - (3A + A)^2], \\
\Delta_{14} &= \frac{1}{64} A^2 (4AA - A^2)^5 [4(3A + A)(3A + A) - (3A + A)^2], \\
\Delta_{15} &= \frac{1}{64} A^3 (4AA - A^2)^5 [4(3A + A)(3A + A) - (3A + A)^2], \\
\Delta_{16} &= \frac{1}{256} A^2 (4AA - A^2)^5 (4AA - A^2) [4(3A + A)(3A + A) - (3A + A)^2], \\
\Delta_{17} &= \frac{1}{1024} A (4AA - A^2)^5 (4AA - A^2)^2 [4(3A + A)(3A + A) - (3A + A)^2], \\
\Delta_{18} &= \frac{1}{4096} (4AA - A^2)^5 (4AA - A^2)^3 [4(3A + A)(3A + A) - (3A + A)^2].
\end{aligned}$$

В итоге исходная квадратичная форма записывается в каноническом виде (8), при этом коэффициенты d_i ($i = 1, \dots, 18$) этого вида, в согласно (9), принимают вид:

$$\begin{aligned}
d_1 &= \Delta_1 = A + A, \quad d_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{A(2A + A)}{A + A}, \quad d_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{A(3A + A)}{2A + A}, \\
d_4 &= \frac{\Delta_4}{\Delta_3} = 2A, \quad d_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta_4} = 2A, \quad d_6 = \frac{\Delta_6}{\Delta_5} = 2A, \\
d_7 &= \frac{\Delta_7}{\Delta_6} = \frac{4A(3A + A)(A + A) - A^2(2A + A) - AA(3A + 2A)}{4A(3A + A)}, \\
d_8 &= \frac{\Delta_8}{\Delta_7} = \frac{(4AA - A^2)[4A(3A + A)(2A + A) - A^2(A + A) - 2AA(3A + 2A)]}{4A[4A(3A + A)(A + A) - A^2(2A + A) - AA(3A + 2A)]}, \\
d_9 &= \frac{\Delta_9}{\Delta_8} = \frac{(4AA - A^2)[4(3A + A)(3A + A) - (3A + A)^2]}{4[4A(3A + A)(A + A) - A^2(2A + A) - AA(3A + 2A)]}, \\
d_{10} &= \frac{\Delta_{10}}{\Delta_9} = \frac{4AA - A^2}{2A}, \quad d_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{10}} = \frac{4AA - A^2}{2A}, \quad d_{12} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{4AA - A^2}{2A}, \\
d_{13} &= \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} = A, \quad d_{14} = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{13}} = A, \quad d_{15} = \frac{\Delta_{15}}{\Delta_{14}} = A, \\
d_{16} &= \frac{\Delta_{16}}{\Delta_{15}} = \frac{4AA - A^2}{4A}, \quad d_{17} = \frac{\Delta_{17}}{\Delta_{16}} = \frac{4AA - A^2}{4A}, \quad d_{18} = \frac{\Delta_{18}}{\Delta_{17}} = \frac{4AA - A^2}{4A}.
\end{aligned}$$

Найдем преобразование приводящее квадратичную форму $\mathcal{U}(Y_1, \dots, Y_{18})$ к каноническому виду. Ввиду громоздкости выкладок, продемонстрируем вычисление некоторых из коэффициентов c_{ij} .

Используя (10), находим элемент c_{12} :

$$c_{12} = \frac{A_{21}^{(2)}}{\Delta_1} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{A_1}{A_1 + A_3}.$$

Определим элементы c_{13} и c_{23} третьего столбца (7):

$$\begin{aligned} c_{13} &= \frac{A_{31}^{(3)}}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 + A_3 & A_1 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{AA_{13}}{A(2A + A_3)} = -\frac{A_1}{2A + A_3}, \\ c_{23} &= \frac{A_{32}^{(3)}}{\Delta_2} = -\frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} A_1 + A_3 & A_1 \\ A_1 & A_1 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{AA_{13}}{A(2A + A_3)} = -\frac{A_1}{2A + A_3}. \end{aligned}$$

Элементы c_{14} , c_{24} , c_{34} четвертого столбца, c_{15} , c_{25} , c_{35} , c_{45} пятого столбца и c_{16} , c_{26} , c_{36} , c_{46} , c_{56} шестого столбца равны нулю.

Перейдем к элементам c_{17} , c_{27} , c_{37} седьмого столбца (7):

$$\begin{aligned} c_{17} &= \frac{A_{71}^{(7)}}{\Delta_6} = \frac{4}{\Delta_6} \begin{vmatrix} A_1 & A_1 & 0 & 0 & 0 & A_7 + A_8 \\ A_1 + A_3 & A_1 & 0 & 0 & 0 & A_7 \\ A_1 & A_1 + A_3 & 0 & 0 & 0 & A_7 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{AA_{37} + 2AA_{18} + AA_{38}}{6AA_{13} + 2A_3^2}, \\ c_{27} &= \frac{A_{72}^{(7)}}{\Delta_6} = -\frac{4}{\Delta_6} \begin{vmatrix} A_1 + A_3 & A_1 & 0 & 0 & 0 & A_7 + A_8 \\ A_1 & A_1 & 0 & 0 & 0 & A_7 \\ A_1 & A_1 + A_3 & 0 & 0 & 0 & A_7 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{AA_{37} - AA_{18}}{6AA_{13} + 2A_3^2}, \end{aligned}$$

$$c_{37} = \frac{A_{73}^{(7)}}{\Delta_6} = \frac{4}{\Delta_6} \left| \begin{array}{cccccc} A_1 + A_3 & A_1 & 0 & 0 & 0 & A_7 + A_8 \\ A_1 & A_1 + A_3 & 0 & 0 & 0 & A_7 \\ A_1 & A_1 & 0 & 0 & 0 & A_7 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 \end{array} \right| =$$

$$= - \frac{AA - AA_{37} - AA_{18}}{6AA_{13} + 2A_3^2}.$$

В итоге линейное преобразование (7) принимает следующий вид:

$$Y_1 = X_1 - \frac{A_1}{A_1 + A_3} X_2 - \frac{A_1}{2A_1 + A_3} X_3 - \frac{AA_{37} + 2AA_{18} + AA_{38}}{6AA_{13} + 2A_3^2} X_7 +$$

$$+ \frac{4A_1(3A_2 + A_4)A_8 - AA_{78}(3A_2 + A_4) + 4A_3(AA_{28} - AA_{47})}{2[4A_3(3A_1 + A_3)(A_2 + A_4) - A_8^2(2A_1 + A_3) - AA_{37}(3A_7 + 2A_8)]} X_8 +$$

$$+ \frac{4A_1(3A_2 + A_4)A_8 - AA_{78}(3A_2 + A_4) + 4A_3(AA_{28} - AA_{47})}{2[A_1(24AA_{23} + 12AA_{34} - A_8^2) + A_3(8AA_{23} + 4AA_{34} - 6A_7^2 - 4AA_{78} - A_8^2)]} X_9,$$

$$Y_2 = X_2 - \frac{A_1}{2A_1 + A_3} X_3 - \frac{AA_{37} - AA_{18}}{6AA_{13} + 2A_3^2} X_7 +$$

$$+ \frac{AA_{18}^3 + AA_{38}(3A_2^2 + 3AA_{78} + A_8^2 - 4A_1(3A_2 + 2A_4)) - 4A_3^2(AA_{28} + A_4(A_7 + A_8))}{2A_3[2A_1(6AA_{23} + 6AA_{34} - A_8^2) + A_3(4AA_{23} + 4AA_{34} - 3A_7^2 - 2AA_{78} - A_8^2)]} X_8 +$$

$$+ \frac{4A_1(3A_2 + A_4)A_8 - AA_{78}(3A_2 + A_4) + 4A_3(AA_{28} - AA_{47})}{2[A_1(24AA_{23} + 12AA_{34} - A_8^2) + A_3(8AA_{23} + 4AA_{34} - 6A_7^2 - 4AA_{78} - A_8^2)]} X_9,$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{AA_{37} - AA_{18}}{6AA_{13} + 2A_3^2} X_7 -$$

$$- \frac{(AA_{37} - AA_{18})(4AA_{34} - A_8^2)}{2A_3[2A_1(6AA_{23} + 6AA_{34} - A_8^2) + A_3(4AA_{23} + 4AA_{34} - 3A_7^2 - 2AA_{78} - A_8^2)]} X_8 +$$

$$+ \frac{A_8(6A_7^2 + 5AA_{78} + A_8^2 - 8A_1(3A_2 + A_4)) - 8A_3(AA_{28} + 2A_4(A_7 + A_8))}{2[A_1(24AA_{23} + 12AA_{34} - A_8^2) + A_3(8AA_{23} + 4AA_{34} - 6A_7^2 - 4AA_{78} - A_8^2)]} X_9,$$

$$Y_4 = X_4 - \frac{A}{2A_3} X_{\underline{10}}, \quad Y_5 = X_5 - \frac{A}{2A_3} X_{\underline{11}}, \quad Y_6 = X_6 - \frac{A}{2A_3} X_{\underline{12}},$$

$$Y_7 = X_7 + \frac{\frac{A(A(3A+2A) - 4AA) - A(12AA + A^2)}{3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{A(12AA + A^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8}}{2A[2A(6AA + 6AA - A^2) + \frac{A(4AA + 4AA - 3A^2 - 2AA - A^2)}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 8}]} X_{\underline{8}} +$$

$$+ \frac{\frac{A(A(3A+2A) - 4AA) - A(12AA + A^2)}{3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{A(12AA + A^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8}}{A(24AA + 12AA - A^2) + \frac{A(8AA + 4AA - 6A^2 - 4AA - A^2)}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 8}} X_9,$$

$$Y_8 = X_8 + \frac{\frac{A(A(3A+2A) - 4AA) - A(12AA + A^2)}{3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{A(12AA + A^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8}}{A(24AA + 12AA - A^2) + \frac{A(8AA + 4AA - 6A^2 - 4AA - A^2)}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 8}} X_9,$$

$$Y_9 = X_9, \quad Y_{\underline{10}} = X_{\underline{10}}, \quad Y_{\underline{11}} = X_{\underline{11}}, \quad Y_{\underline{12}} = X_{\underline{12}},$$

$$Y_{\underline{13}} = X_{\underline{13}} - \frac{A}{2A_5} X_{\underline{16}}, \quad Y_{\underline{14}} = X_{\underline{14}} - \frac{A}{2A_5} X_{\underline{17}}, \quad Y_{\underline{15}} = X_{\underline{15}} - \frac{A}{2A_5} X_{\underline{18}},$$

$$Y_{\underline{16}} = X_{\underline{16}}, \quad Y_{\underline{17}} = X_{\underline{17}}, \quad Y_{\underline{18}} = X_{\underline{18}}.$$

4. Система определяющих неравенств. Положительная определенность энергии деформации (4) в соответствии с критерием Сильвестра обеспечивается выполнением неравенств $\Delta_k > 0$ ($k = 1, \dots, 18$) [7–9]. С учетом очевидных упрощений, полученных ранее 18 угловых миноров эти неравенства, выраженные через определяющие механические модули микрополярной среды, принимают следующую форму:

$$\begin{aligned} A + \frac{A}{3} > 0, \quad 2A + \frac{A}{3} > 0, \quad 3A + \frac{A}{3} > 0, \quad \frac{A}{3} > 0, \\ 4AA - A^2 > 0, \quad 4AA - A^2 > 0, \quad \frac{A}{5} > 0, \\ 4A(3A + A)(\frac{A}{2} + \frac{A}{4}) - \frac{A^2}{8}(2A + \frac{A}{3}) - \frac{AA(3A + 2A)}{3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8} > 0, \\ 4A(3A + A)(2A + \frac{A}{3}) - \frac{A^2}{8}(\frac{A}{1} + \frac{A}{3}) - \frac{2AA(3A + 2A)}{3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8} > 0, \\ 4(3A + \frac{A}{3})(3A + \frac{A}{2}) - (3A + \frac{A}{7})^2 > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Очевидно, каждое из неравенств $A + \frac{A}{3} > 0$ и $2A + \frac{A}{3} > 0$, являются следствием неравенств $3A + \frac{A}{3} > 0$ и $\frac{A}{3} > 0$. В результате приходим к системе восьми

неприводимых неравенств:

$$\begin{aligned}
 3A_1 + A_3 &> 0, \quad A_3 > 0, \quad A_5 > 0, \\
 4A_3A_4 - A_8^2 &> 0, \quad 4A_5A_6 - A_9^2 > 0, \\
 4A_3(3A_1 + A_3)(A_2 + A_4) - A_8^2(2A_1 + A_3) - A_3A_7(3A_7 + 2A_8) &> 0, \\
 4A_3(3A_1 + A_3)(2A_2 + A_4) - A_8^2(A_1 + A_3) - 2A_3A_7(3A_7 + 2A_8) &> 0, \\
 4(3A_1 + A_3)(3A_2 + A_4) - (3A_7 + A_8)^2 &> 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Полученная система неравенств обеспечивает положительную определенность энергии деформации.

5. Выводы. В данной работе представлена методика приведения квадратичной формы энергию деформации (18 переменных) к каноническому виду методом Якоби. Основные результаты работы могут быть сформулированы следующим образом:

- (1) В рамках Апредставления энергии деформации введен вспомогательный 18мерный вектор формальных переменных, который посредством линейного невырожденного преобразования переведен в новый канонический вектор.
- (2) Диагонализация квадратичной формы выполнена методом Якоби, основанным на последовательном приведении матрицы квадратичной формы к диагональному виду с использованием угловых миноров. Было показано, что предложенный метод обладает рядом достоинств: 1) коэффициенты d_i ($i = 1, \dots, 18$) канонического вида вычисляются с помощью явных формул; 2) преобразование к новым переменным имеет верхнетреугольный вид: каждая новая переменная равна сумме соответствующей исходной переменной и линейной комбинации последующих исходных переменных.
- (3) Из требования положительной определенности квадратичной формы выведены ограничения на определяющие механические модули. Проведенный анализ показал, что исходная система из 18 условий, формально следующих из критерия Сильвестра, является избыточной. Благодаря структуре Апредставления и свойствам метода Якоби эти 18 неравенств удастся свести к восьми эквивалентным неприводимым неравенствам. Такая редукция сокращает число проверяемых условий при идентификации материала и упрощает аналитическое исследование области допустимых значений параметров.
- (4) Благодаря существованию обратного преобразования все результаты, полученные в новых переменных (система неприводимых неравенств, диагональный вид формы, условия положительной определенности), могут быть выражены непосредственно через исходные переменные. Это

обеспечивает переход (интеграцию) от формального математического аппарата к прикладной механике гемитропных сред

Автор выражает признательность Ю. Н. Радаеву и Е. В. Мурашкину за ценные замечания и постоянное внимание к работе.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Competing interests. The author declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gunther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1958. Jg. 10. S. 195–213.
2. Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums // Abh. Braunsch. Wiss. Ges. 1964. Jg. 16. S. 1–22. DOI: 10.24355/dbbs.084-201301181342-0.
3. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics / ed. by H. Görtler. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
4. Nowacki W. Theory of Micropolar Elasticity: Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine. Vol. 25. Wien, New York: Springer, 1972. 286 p. (International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures). DOI: 10.1007/978-3-7091-2720-9.
5. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
6. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
7. Апатенок Р. Ф., Маркина А. М., Попова Н. В., Хейнман В. Б. Элементы линейной алгебры. Минск: Вышэйш. школа, 1977. 256 с.
8. Шилов Г. Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. Москва: Наука, 1969. 432 с.
9. Яцкин Н. И. Линейная алгебра: Теоремы и алгоритмы. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2008. 607 с.

REFERENCES

1. Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1958. Vol. 10. P. 195–213.

2. Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums // Abh. Braunsch. Wiss. Ges. 1964. Vol. 16. P. 1–22. DOI: 10.24355/dbbs.084-201301181342-0.
3. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics / ed. by H. Görtler. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
4. Nowacki W. Theory of Micropolar Elasticity: Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine. Vol. 25. Wien, New York: Springer, 1972. 286 p. (International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures). DOI: 10.1007/978-3-7091-2720-9.
5. Radayev Y. N. Multiplier Rule in Covariant Formulations of Micropolar Continuum Mechanics Theories // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki. 2018. Vol. 22, no. 3. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
6. Radayev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor Formulation of the Mechanics of Hemitropic Micropolar Media // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
7. Apatenok R. F., Markina A. M., Popova N. V., Kheinman V. B. Elements of Linear Algebra. Minsk: Vysheyshaya Shkola, 1977. 256 p.
8. Shilov G. E. Mathematical Analysis: Finite-Dimensional Linear Spaces. Moscow: Nauka, 1969. 432 p.
9. Yatskin N. I. Linear Algebra: Theorems and Algorithms. Ivanovo: Ivanovo State University, 2008. 607 p.