

Н. Ю. Зайко¹, О. Н. Любимова^{1,2}

О СВЯЗИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТРЕНИЯ И СТЕСНЕННОЙ ДЕФОРМАЦИИ В КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАГРУЗКАХ

¹Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия

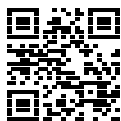
²Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН,
Хабаровск, Россия

Аннотация. Исследуется новый подход к решению контактной задачи для системы сопряженных цилиндров из материалов с разными термомеханическими свойствами при температурных нагрузках. Предложены неклассические условия, позволяющие моделировать контактное взаимодействие через стесненную деформацию, при температурных нагрузках. Введен новый параметр, характеризующий степень проскальзывания на границе сопряжения материалов – коэффициент стесненной деформации. За стесненную деформацию принимается разница деформаций при разных условиях проскальзывания по границе сопряжения материалов. Контактное условие имеет простой физический смысл: стесненная деформация прямо пропорциональна максимальной разнице деформаций в условиях свободного проскальзывания сопряженных слоев при нагреве (или охлаждении), коэффициент пропорциональности и есть коэффициент стесненной деформации. В условиях осевой симметрии и обобщенного плоского деформированного состояния, при поставленном условии для задачи получено аналитическое решение. Параллельно, в рамках классической постановки контактной задачи проведено численное моделирование в конечно-элементном пакете ANSYS для сопряженных цилиндров с разными модулями упругости и коэффициентами линейного температурного расширения. Получена аналитическая связь введенного коэффициента стесненной деформации с коэффициентом трения и показана сходимость решения в новой постановке к решению в классической постановке. Теоретическая и практическая значимость вводимого коэффициента стесненной деформации связана с возможностью его экспериментальной оценки посредством дилатометрических измерений в соединениях при изменении температуры. Зная связь коэффициента стесненной деформации с коэффициентом трения появляется возможность экспериментальной оценки коэффициента трения для разнородных соединений при температурных изменениях. Несмотря на то, что основной целью работы является моделирование поведения стеклометаллических изделий (стеклометаллокомпозитных оболочек и стержней), установленные результаты могут быть полезны при моделировании контактного взаимодействия в сварных конструкциях и слоистых композитах.

Ключевые слова: контактная задача, термонапряженное состояние, соосные цилиндрические системы, стесненная деформация, коэффициент трения, коэффициент стесненной деформации

Зайко Надежда Юрьевна, старший преподаватель; e-mail: golobokova.nju@dvfu.ru;
<https://orcid.org/0009-0008-8420-6183>;

Любимова Ольга Николаевна, профессор; e-mail: berms@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4802-7352>;



для цитирования: Зайко Н. Ю., Любимова О. Н. О связи коэффициентов трения и стесненной деформации в контактной задаче при температурных нагрузках // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 173–191. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.010. EDN: GDIBGH

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

N. Y. Zaiko¹, O. N. Lyubimova^{1,2}

ON THE RELATIONSHIP BETWEEN COEFFICIENTS OF FRICTION AND CONSTRAINED DEFORMATION IN A CONTACT PROBLEM UNDER TEMPERATURE LOADS

¹*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russian Federation*

²*Khabarovsk Branch of the Federal State Budgetary Institution of Science Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation*

Abstract. This paper presents a new approach to solving the contact problem that arises when a system of cylindrical elements made of materials with different thermomechanical properties interacts under temperature loads. Within the framework of this approach, non-standard conditions are proposed that make it possible to simulate the process of contact interaction through a constrained deformation that occurs under the influence of temperature. A new parameter has been introduced — the coefficient of constrained deformation, which characterizes the degree of slippage at the boundary between materials. Constrained deformation is defined as the difference between deformations that occur under different slip conditions at the interface of the materials. The contact condition has a simple physical meaning: the relative deformation that occurs in a confined state is directly proportional to the maximum difference in deformations that occur when the conjugate layers slip freely when the temperature changes. The coefficient of proportionality between these values is called the coefficient of constrained deformation. Under the conditions of axial symmetry and generalized planar deformed state, when all the necessary conditions of the problem are fulfilled, an analytical solution was obtained. In parallel, within the framework of the classical formulation of the contact problem, numerical modeling was carried out in software system for finite element analysis ANSYS for coupled cylinders with various modulus of elasticity and coefficients of linear thermal expansion. As a result, an analytical relationship was established between the introduced coefficient of constrained deformation and the coefficient of friction, and the convergence of the solution in the new formulation to the solution in the classical formulation was demonstrated. The theoretical and practical value of the coefficient of constrained deformation lies in the possibility of its experimental determination using dilatometric methods in compounds with temperature changes. Knowing the relationship between the coefficient of constrained deformation and the coefficient of friction, it is possible to estimate the coefficient of friction for joints made of dissimilar materials under temperature changes. Although the main purpose of the study is to model the behavior of glass-metal products, such as glass-metal composite shells and rods, the results obtained can also be useful for modeling contact interaction in welded structures and layered composites.

Keywords: contact problem, thermally stressed state, coaxial cylindrical systems, constrained deformation, coefficient of friction, coefficient of constrained deformation

Nadezhda Y. Zaiko, Senior Lecturer; e-mail: golobokova.nju@dvfu.ru; <https://orcid.org/0009-0008-8420-6183>;

Olga N. Lyubimova, Professor; e-mail: berms@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4802-7352>;



to cite this article: Zaiko N. Y., Lyubimova O. N. On the relationship between coefficients of friction and constrained deformation in a contact problem under temperature loads // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 173–191. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.010

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение Актуальность работы определяет практическая задача получения стеклометаллокомпозитных цилиндрических оболочек как элементов корпуса глубоководных аппаратов [1–3]. В целом стеклометаллокомпозитные оболочки представляют из себя двух- и трехслойный стеклометаллический композит, в котором стеклянный монослой из неорганического кварцевого стекла внутренний или заключен между металлическими слоями из стали или алюминия (Рис. 1). Технология получения связана с термической обработкой, в результате которой соединение слоев происходит за счет диффузии через границу раздела (сталь-стекло) [2], либо за счет механического сцепления при термомоформировании в зоне пластичности (стекло-алюминий) [3].

Если технологические параметры подобраны неточно, то зона контакта может содержать промежуточные хрупкие слои или дефекты, в виде неплотного прилегания материалов, что влияет на напряженно-деформируемое состояние при следующих циклах технологической температурной обработки и при эксплуатации в режимах циклического нагрева-охлаждения. Одновременно существенную сложность представляет диагностика качества зоны соединения особенно для трехслойного композита, когда внутренний стеклянный монослой закрыт даже от визуального осмотра. Подготовка к микроскопическим исследованиям зоны соединения, вносит дополнительные дефекты при пробоподготовке и существенно ограничена по оценке качества во всем объеме зоны соединения [2]. В методике определения адгезионной прочности при механических нагрузках, посредством выдавливания стеклянного слоя вдоль металлических, не удастся зафиксировать начало хрупкого разрушения в стекле, что приводит к заниженной или завышенной оценке прочности соединения [4]. Перспективные неразрушающие методы контроля, например, ультразвуковые исследования представляют отдельную задачу для диагностики слоистых материалов, трудность оценки этими методами связана с ограничением по доступности к зоне соединения как для случая наличия дефектов в монослое стекла и металла, так и в случае трехслойной оболочки или стержня [5].

Вместе с тем, моделируя термические напряжения в стеклометаллокомпозите было предложено описывать качество контактного взаимодействия через температурные деформации и дилатометрические исследования [6]. Не претендуя на полноту, проведенный анализ существующих модельных представлений в механике контактного взаимодействия многослойных систем позволил выделить два основных подхода. Первый заключается в том, что контактное взаимодействие между слоями рассматривается как взаимодействие слоистых структур при соблюдении условий непрерывности перемещений и напряжений при переходе через межфазную границу (идеальный контакт) [7–10], такой подход не позволяет оценить неоднородную межфазную границу, которая может сама являться причиной снижения адгезионного сцепления между слоями, в следствии неоднородности своей структуры и расслоений внутри себя по границам различных фаз. Второй подход связан с моделированием покрытий с дефектами, неполным контактом или неоднородными свойствами в зоне соединений,

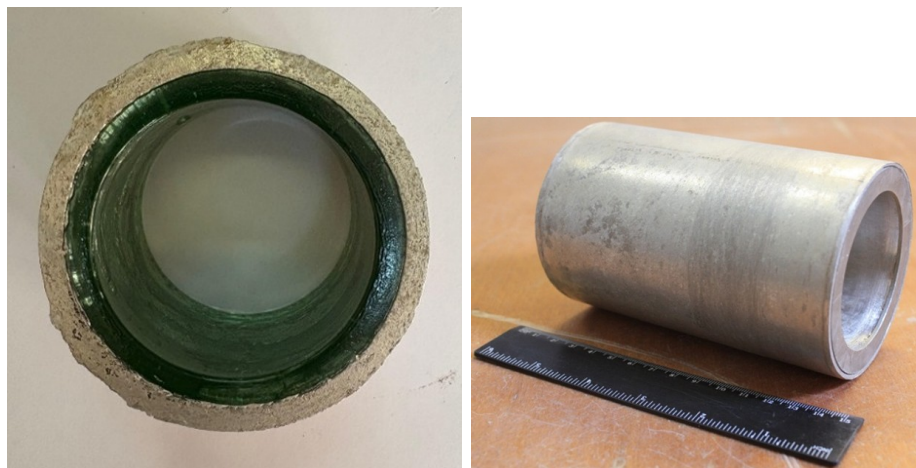


Рис. 1. Фотографии экспериментальных стеклометаллических оболочек 2-х и 3-х слойных

а также, наличие зон с ослабленным межфазным контактом на поверхностях раздела смежных слоев и разрабатывался для задач трибологии [11–14]. Соответственно параллельно отрабатывались приемы экспериментальной оценки параметров моделей и уточнения модельных представлений методами индентирования и истирания.

Для рассматриваемого стеклометаллического материала, моделирование в рамках второго подхода, во-первых существенно усложняет моделирование в интервале стеклования при расчете релаксации напряжений в стеклянном слое и пластического течения в металлическом и во вторых, остается открытым вопрос экспериментального определения коэффициента трения, на границе соединяемых материалов, в том числе и его зависимости от температуры. Несмотря на то, что исследования зависимости коэффициента трения от изменения температуры в контактирующих материалах проводятся регулярно [15–19], но учитывая, сложность, обусловленную влиянием множества факторов, например, таких как: изменение механических свойств контактирующих материалов; изменение состава и свойств промежуточных слоев; физическая и химическая адсорбции; химические реакции на поверхности, активируемые трением, сохраняют свою актуальность.

Применение первого подхода, в рамках которого разработан и алгоритм расчета релаксации аморфных покрытий на металлических подложках [10, 20], хорошо описывает ситуацию идеального контакта, моделирование зоны соединения возможно, как отдельного монослоя с физико-механическими характеристиками, которые не ясно как экспериментально определять. Вместе с тем введенная в работе [10] стесненная деформация постоянная по толщине стеклянной компоненты спая (Рис. 2), оказалась эффективной в качественном описании

остаточных напряжений и моделировании отжига как стекло-металлических спаев, так и аморфных покрытий.

Актуальность построения моделей, учитывающих эффекты механического взаимодействия между поверхностями и более ясного представления о вводимых в граничные условия коэффициентов трения и определила цель настоящей работы. В работах [6, 20] предложено модельное представление о стесненной деформации в условиях неоднородного температурного поля для конструктивных элементов в соединении стекла и металла и введено понятие коэффициента характеризующего качество сцепления, в настоящей работе это коэффициент назван коэффициентом стесненной деформации. Теоретическая и практическая значимость вводимого коэффициента стесненной деформации связана с возможностью его экспериментальной оценки посредством дилатометрических измерений в соединениях при изменении температуры. Если определить связь коэффициента стесненной деформации с коэффициентом трения вводимым в классических контактных задачах (реализованных, в том числе, в конечно-элементном пакете ANSYS), то появится возможность экспериментальной оценки коэффициента трения для разнородных соединений при температурных изменениях. Которая, в свою очередь, приведет к повышению точности модельных представлений при проектировании разнородных соединений и конструкций из них в САЕ системах.

Целью данной работы являлось установления зависимости между коэффициентом стесненной деформации и классическим коэффициентом трения скольжения.

Изложение в работе определено следующим образом, в пункте 1 задача о термдеформировании сопряженных цилиндрических тел при предположении об осесимметричном и одинаковом по образующей распределении температуры решена с новым модельным представлением о деформации на границе с коэффициентом стесненной деформации. В пункте 2 в конечно-элементном пакете ANSYS получено решение аналогичной задачи для различных значений коэффициента трения. В пункте 3 исследуется зависимость между коэффициентом трения и коэффициентом стесненной деформации. В пункте 4 проведено сравнение экспериментальных данных с расчетными с применением модели.

1. Постановка задачи и математическая модель Рассматривается контактное взаимодействие длинной осесимметричной цилиндрической системы из материалов с разными физико-механическими характеристиками при температурных нагрузках. Внешний радиус R_2 , радиус на границе сопряжения R_1 , внутренний R_0 (для стекломаталлокомпозитного стержня $R_0 = 0$) (Рис. 2а). Материалы имеют разное температурное расширение, которое является причиной термических напряжений даже при одинаковой температуре, в работе [20] такие напряжения называются коэффициентными, а деформация стесненной. Предполагается возможность проскальзывания только в осевом направлении. При отсутствии дополнительных внешних нагрузок на торцы возможны два

предельных состояния, представленные на Рис. 2б последовательно, после изменения температуры на ΔT : свободное проскальзывание вдоль оси z и идеальный контакт. При $\Delta T = T - T_0 > 0$ моделируется нагрев и контактное расширение, соответственно при $\Delta T < 0$ – охлаждение и сжатие, T_0 – начальная температура. Очевидно, что разница в относительном линейном удлинении в осевом направлении при сжатии (расширении) достигает своего максимального значения при свободном проскальзывании.

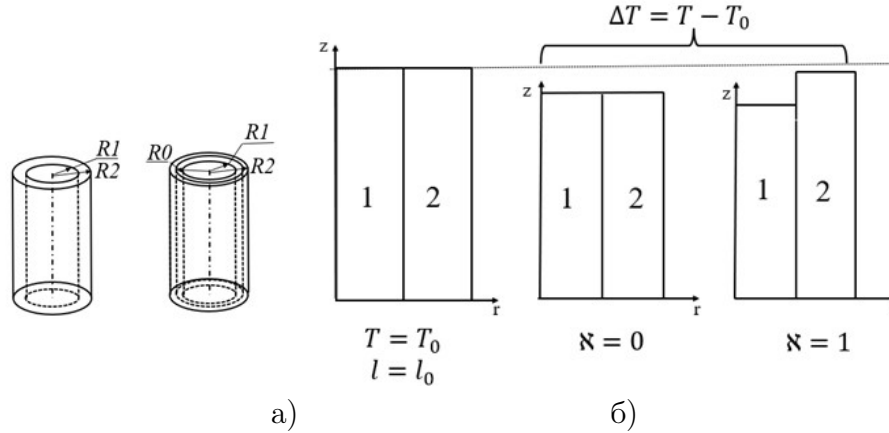


Рис. 2. Геометрия исследуемых образцов (а); схема контактного взаимодействия при изменении температуры (б)

В данной постановке приняты гипотезы об осевой симметрии, обобщенном плоском деформированном состоянии и аддитивном представлении общих деформаций, что позволяет представить общую деформацию в виде суммы упругой и температурной. Вводятся следующие обозначения: r , φ , z – цилиндрические координаты; T – температура; α – коэффициент линейного температурного расширения; G – модуль сдвига; K – модуль объемной деформации; k – индекс слоев (в скобочках обозначает именно номер слоя, а не порядок производной); ε_r , ε_φ , ε_z и σ_r , σ_φ , σ_z – компоненты тензоров деформации и напряжения, соответственно, которые при принятых гипотезах имеют диагональный вид, u_r , u_φ , u_z – компоненты вектора перемещений, которые при принятых гипотезах имеют вид

$$u_r^{(k)} = u^{(k)}(r, T), \quad u_\varphi^{(k)} = \text{const}, \quad u_z^{(k)} = z w^{(k)}(T) \quad (1)$$

$$\varepsilon_{r,\varphi,z} = \varepsilon_{r,\varphi,z}^e + \varepsilon^T \quad (2)$$

здесь $\varepsilon^T = \int_{T_0}^T \alpha^{(k)}(T) dT$ – температурные деформации, $\varepsilon_{r,\varphi,z}^e$ – упругие деформации, при $k = 1 : r \in [R_0, R_1]$; $k = 2 : r \in [R_1, R_2]$.

С учетом (1) и (2) математическая формулировка задачи для каждого слоя включает:

соотношения Коши в виде

$$\varepsilon_r^{(k)} = \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi^{(k)} = \frac{u^{(k)}}{r}, \quad \varepsilon_z^{(k)} = w^{(k)}(T) \quad (3)$$

уравнения Дюамеля-Неймана

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(k)} &= \left(\frac{4}{3}G^{(k)} + K^{(k)} \right) \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} + \left(K^{(k)} - \frac{2}{3}G^{(k)} \right) \left(\frac{u^{(k)}}{r} + w^{(k)} \right) - 3K^{(k)}\varepsilon^T, \\ \sigma_\varphi^{(k)} &= \left(K^{(k)} - \frac{2}{3}G^{(k)} \right) \left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} + w^{(k)} \right) + \left(\frac{4}{3}G^{(k)} + K^{(k)} \right) \frac{u^{(k)}}{r} - 3K^{(k)}\varepsilon^T, \quad (4) \\ \sigma_z^{(k)} &= \left(K^{(k)} - \frac{2}{3}G^{(k)} \right) \left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} + \frac{u^{(k)}}{r} \right) + \left(\frac{4}{3}G^{(k)} + K^{(k)} \right) w^{(k)} - 3K^{(k)}\varepsilon^T, \end{aligned}$$

уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{\sigma_r^{(k)} - \sigma_\varphi^{(k)}}{r} = 0 \quad (5)$$

Уравнения (1)-(5) дополняются условиями на внешних поверхностях (при $r = R_0$ и $r = R_2$)

$$\sigma_r(R_0, T) = P_1(T), \quad \sigma_r(R_2, T) = P_2(T) \quad (6)$$

и условиями контактного взаимодействия по перемещениям и напряжениям (при $r = R_1$). Нормальные проекции векторов напряжений и перемещений задаются как для идеального контакта

$$u^{(1)}(R_1, T) = u^{(2)}(R_1, T), \quad \sigma_r^{(1)}(R_1, T) = \sigma_r^{(2)}(R_1, T) \quad (7)$$

Для учета проскальзывания вдоль оси предлагается новое условие, взамен условию Амонтона-Кулона о пропорциональности нормальных касательным напряжениям с коэффициентом пропорциональности μ – называемым коэффициентом трения скольжения. Новое условие формулируется как прямая пропорциональность разницы осевых деформаций максимальной разнице этих деформаций $\Delta\varepsilon_z(T)$ в условиях свободного проскальзывания сопряженных слоев при нагреве (или охлаждении) с коэффициентом пропорциональности $\aleph$ – называемым коэффициентом стесненной деформации (в работе [6] назван коэффициентом проскальзывания (сцепления)). Принимаются также условия равенства нулю осевой нагрузки, приложенной к цилиндру.

Предлагаемое контактное условие реализуется в две итерации: в первой определяется максимальная разница осевых деформаций в условиях сопряженных слоев, при этом, принято, что

$$\aleph = 1 : \quad \Delta \varepsilon_z(T) = \varepsilon_z^{(1)}(T) - \varepsilon_z^{(2)}(T) \quad (8)$$

$$\int_{R_0}^{R_1} \sigma_z^{(1)}(r, T) r dr = 0, \quad \int_{R_1}^{R_2} \sigma_z^{(2)}(r, T) r dr = 0 \quad (9)$$

Далее во второй итерации для стесненной деформации принимается, что

$$0 \leq \aleph < 1 : \quad \varepsilon_z^{(1)} - \varepsilon_z^{(2)} = \aleph \Delta \varepsilon_z(t) \quad (10)$$

$$\int_{R_0}^{R_1} \sigma_z^{(1)}(r, T) r dr + \int_{R_1}^{R_2} \sigma_z^{(2)}(r, T) r dr = 0 \quad (11)$$

Идеальный контакт является следствием условий 10)-(11) при $\aleph = 0$.

В начальный момент времени при $T = T_0$ все напряжения и деформации считаются нулевыми.

Решение задачи (1)-(11) находится в аналитическом виде, причем задача допускает увеличение слоев и моделирование разной степени проскальзывания на границах сопряжения, кроме того, возможно усложнение уравнений (4) для учета более сложного реологического поведения материалов с сохранением возможности получения аналитического решения.

Далее исследуется сходимость решений задачи (1)-(11) к решению полученному в классической постановке контактной задачи с условием Амонтона-Кулона при численном моделировании в конечно-элементном пакете ANSYS.

2. Численная реализация в ANSYS В рамках данной работы исследуется сходимость решений в предложенной постановке (1)-(11) к классической постановке контактной задачи в системе анализа МКЭ ANSYS. Задача решалась при разном коэффициенте трения между материалами, который варьировался от 0 до 1 с шагом 0,01. Для моделирования касательных напряжений в модели когезионной зоны (CZM) при контакте верхней и нижней поверхностей используется изотропный закон трения Кулона.

Моделировались два типа соединения: стеклометаллический стержень (тип 1, Табл. 2); цилиндрическая двухслойная оболочка (тип 2, Табл. 2). Материалы слоев имели теплофизические характеристики, представленные в Таблице 2.

Рассматривались три вида контакта на границе контактирующих материалов R_1 : идеальный контакт; контакт с трением вдоль образующей коэффициент трения μ варьировался от 0 до 1 с шагом 0,01; свободное проскальзывание вдоль образующей при температурном расширении. Сетка конечных элементов задавалась неоднородной, с измельчением на границе контакта (Табл. 2); тип элементов SOLID186, гексаэдр. Рассматривается упругая задача, поэтому температурный режим выбран ниже температуры стеклования: равномерное охлаждение от 500 °C до 20 °C.

	$k = 1$ (стекло)		$k = 2$ (сталь)
	R_0 , м	R_1 , м	R_2 , м
Тип 1	0	0.004	0.005
Тип 2	0.003	0.004	0.005
α , $^{\circ}\text{C}^{-1}$	$5.2 \cdot 10^{-6}$		$12.1 \cdot 10^{-6}$
G , МПа	29230.76923		74626.86568
K , МПа	63333.33333		208333.33334
T , $^{\circ}\text{C}$	20		
T_0 , $^{\circ}\text{C}$	500		

Таблица 1. Геометрические и теплофизические характеристики

Параметр		Тип1	Тип 2
Размер элемента сетки, 10^{-3} м	в объеме слоя	0.1	0.01
	на границе	0.05	0.01
Количество элементов сетки		1094221	1968348
Количество граней		3528558	7553009
Невязка, МПа		0.138737	0.00402

Таблица 2. Характеристики разбиения

Во время анализа результатов моделирования выявлены торцевые эффекты, которые охватывают область около 2,5 мм в глубь образца, что негативно сказывается на представлении результатов, так как максимальные напряжения в этой зоне в два раза выше чем в основном теле образца. Торцевые эффекты наблюдаются при условиях контакта без разделения и контакта с трением, в то время как для условия без трения торцевой эффект не обнаружен (Рис. 3а). Для того что бы вывести результаты без торцевых эффектов построена вспомогательная геометрия в виде линии у границы симметрии, т.е. отображаются только напряжения для центральной части длины образца, результаты приведены на Рис. 3б.

Заметно что в результатах моделирования контакта без разделения максимальные напряжения по Мизесу определяются в стали у границы со стеклом и полностью совпадает со значением полученным в модели, что продемонстрировано на графиках рисунка (Рис. 3б,в (слева). При моделировании контакта без трения напряженно деформированное состояние модели имеет качественно такое же распределение как в случае с контактом без разделения, максимальные напряжения также совпадают со значениями полученными в модели (1)-(11) (Рис. 3б,в (справа).

3. Результаты расчетов Сравнение производилось по инвариантам тензоров напряжений, полученных в разных модельных представлениях:

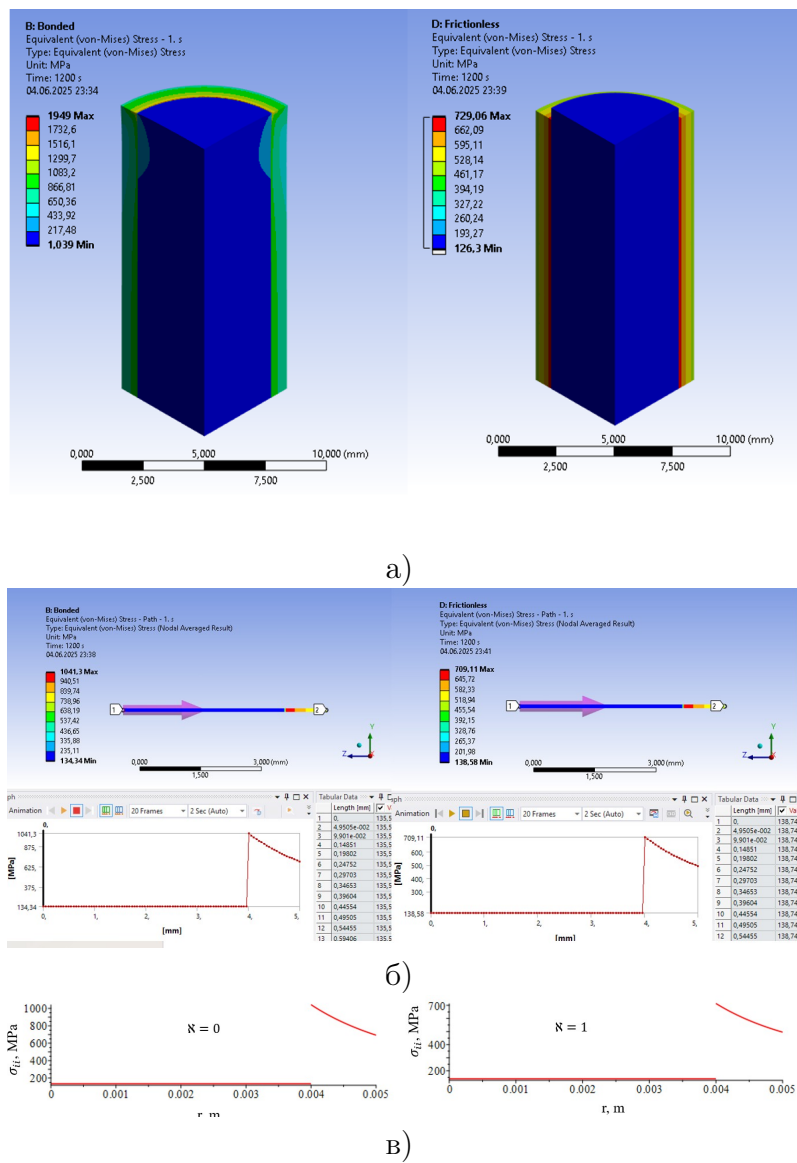


Рис. 3. Эквивалентные напряжения по Мизесу, идеальный контакт (слева) и свободное проскальзывание (справа), тип 1 (стеклометаллокомпозитный стержень). Реализация в CAE ANSYS (а), (б); численное моделирование (в)

$I_i(\mu)$ – инварианты тензора напряжений, полученные в ANSYS при разных значениях коэффициента трения μ (Рис. 4)

$$\begin{aligned}
I_1(\mu) &= \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr} + \sigma_{zz}, \\
I_2(\mu) &= -\sigma_{\varphi r}^2 - \sigma_{\varphi z}^2 + \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{rz}^2, \\
I_3(\mu) &= -\sigma_{rr}\sigma_{\varphi z}^2 + 2\sigma_{rz}\sigma_{\varphi r}\sigma_{\varphi z} - \sigma_{zz}\sigma_{\varphi r}^2 + \sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{rr} - \sigma_{rz}^2\sigma_{\varphi\varphi},
\end{aligned} \tag{12}$$

$I_i(\aleph)$ – инварианты тензора напряжений полученные в модели (1)-(11), при разных значениях коэффициента стесненной деформации $\aleph$ (Рис. 4)

$$\begin{aligned}
I_1(\aleph) &= \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr} + \sigma_{zz}, \\
I_2(\aleph) &= \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz} + \sigma_{rr}\sigma_{zz}, \\
I_3(\aleph) &= \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz}\sigma_{rr}
\end{aligned} \tag{13}$$

На рисунке 4 по вертикальной оси отложены относительные значения инвариант $I_i/I_i^{\max}$, где $I_i^{\max}$ максимальное значение для каждого значения инварианта.

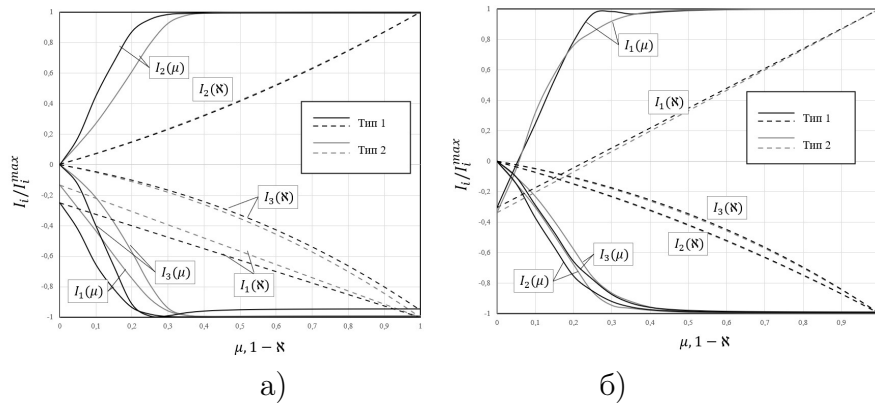


Рис. 4. Зависимость инвариантов тензора напряжений от коэффициента стесненной деформации в модели и от коэффициента трения в ANSYS на границе контакта в стекле (а) и в металле (б)

Для каждого значения коэффициента трения μ , с учетом соответствующего ему значения инварианта I_i ($i=1..3$), было найдено значение коэффициента стесненной деформации $\aleph$. Дальнейший анализ проводился для математического ожидания по всей выборке. Зависимость между средним значением коэффициента стесненной деформации и коэффициентом трения аппроксимирована в виде:

$$\aleph = a_1\mu^4 + a_2\mu^3 + a_3\mu^2 + a_4\mu + a_5 \tag{14}$$

здесь $a_1 = -7.21031$, $a_2 = 19.106$, $a_3 = -18.212$, $a_4 = 7.3564$, $a_5 = 0.0622$.

После пересчета значений инвариантов тензора напряжений в модели (1)-(11) с коэффициентом стесненной деформации $\aleph(\mu)$ определяемым по (14) можно

сказать о сходимости решений предлагаемой модели к классической контактной задаче, реализованной в ANSYS (Рис. 5).

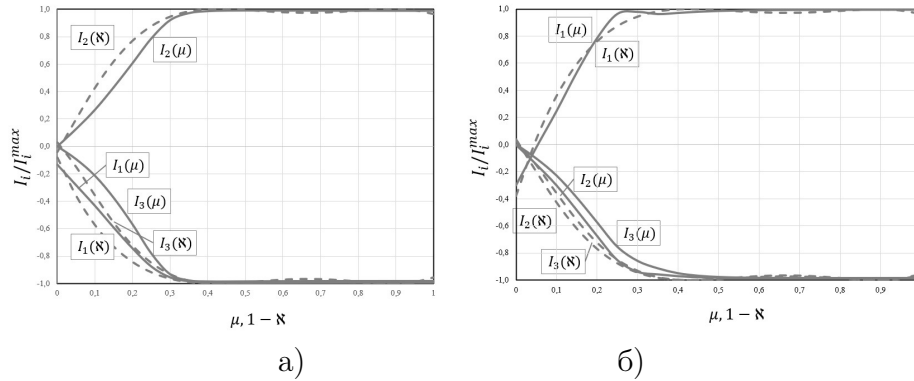


Рис. 5. Зависимость инвариантов тензора напряжений от коэффициента стесненной деформации в модели и от коэффициента трения в ANSYS на границе контакта для типа 2 в стекле (а) и в металле (б) после пересчета значений инвариантов в модели с учетом (14)

Зависимость между коэффициентом трения и коэффициентом стесненной деформации предлагается рассматривать в виде:

$$\mu = a_1 \kappa \operatorname{ch}(a_2 \kappa^{a_3}) \quad (15)$$

Заметим, что значения коэффициентов: $a_1 = 0.25001$; $a_2 = 2.17113$; $a_3 = 17.1115$ определенные для образца типа 1 (Рис. 6а) остаются такими же и для образца типа 2 (Рис. 6б).

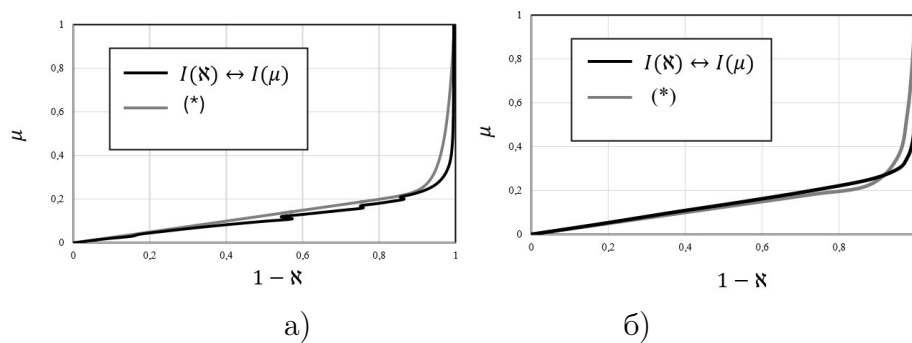


Рис. 6. Результаты сходимости решений для образца типа 1(а), для образца типа 2(б)

Для сравнения полученных результатов по модели (1)-(11) с экспериментальными были проведены экспериментальные исследования для цилиндрических элементов стекла и стеклометаллокомпозита на dilatометре NETZSCH DIL 402

РС и лабораторной экспериментальной установке с горизонтальной загрузкой образцов и индукционным нагревом (Дт-ГИ). В работе [21] отработана технология получения идеального контакта при получении стеклометаллических стержней на основе стали 10 и боросиликатного неорганического стекла СН-1, с идеальным контактом приняты экспериментальные образцы изученной технологии включающей стадию предварительной химической двухступенчатой обработки с определенным временем выдержки при максимальной температуре (Рис. 7б (красные точки)), свободное проскальзывание исследовалось на образцах полученных по технологии с предварительной холодной химической обработкой полученных горячей посадкой (Рис. 7б (красные точки)). Дилатометрические измерения на интервале (30, 550) °С сопоставлялись с результатами моделирования при коэффициентах стесненной деформации $\aleph = 0$ (Рис. 7б) и $\aleph = 1$ (Рис. 7а). Экспериментально исследовались цилиндрические образцы диаметром 10 мм и длиной 25 мм. Стандартные дилатометрические исследования предполагают измерение перемещения с торцов цилиндрических образцов при изменяющейся температуре.

Для стеклянного образца исследования проводились на дилатометре NETZSCH DIL 402 PC, а для стеклометаллического образца на Дт-ГИ. Хорошее совпадение результатов экспериментальных и аналитических деформаций определяет направление дальнейших исследований, которые должны быть направлены на анализ и соответствие качества зоны соединения $\leftrightarrow$ коэффициент стесненной деформации.

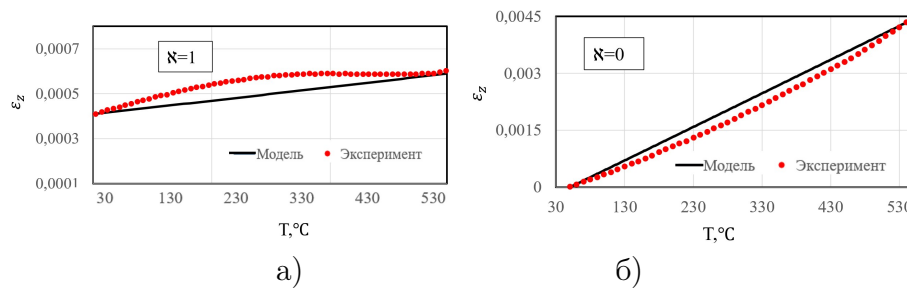


Рис. 7. Результаты сравнения: а) NETZSCH DIL 402 PC, стекло, $\aleph = 1$; б) Дт-ГИ, стеклометаллокомпозит, $\aleph = 0$

4. Выводы В работе предложена новая постановка контактной задачи для одномерного случая, который возникает при гипотезах осевой симметрии и обобщенного плоского деформированного состояния в сопряженных цилиндрических системах в задачах трения при температурном расширении.

Известно, что контактную задачу обычно записывают с контактными условиями Амонтона-Кулона, что сразу повышает размерность задачи, приводит к нелинейности и численной реализации.

Задача с краевыми условиями (6)-(11) решается аналитически причем не только для упругих тел, но и для тел с более сложной реологией.

Естественно предлагаемая модель имеет ограничения связанные прежде всего с принятыми гипотезами, но ее практическая значимость не ограничена только экспериментальной работой по получению определенных пар соединений стекла-металла которой увлечены авторы. Не трудно найти другие практически значимые приложения, например, в задачах об усталостной прочности при периодических температурных нагрузках в слоистых трубках из разнородных материалов для химической промышленности, в изделиях типа вал в цилиндре полученных горячей посадкой и последующей эксплуатацией при изменяющейся температуре.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Н. Ю. Зайко – проведение численного моделирования, анализ результатов, написание текста; О. Н. Любимова – разработка математической модели, постановка задачи, написание текста.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. N.Y. Zaiko – numerical modeling, analysis of results, writing; O.N. Lyubimova – development of mathematical model, problem formulation, writing.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences No. 075-00459-25-00

ЛИТЕРАТУРА

1. Pikul V., Goncharuk V., Maslennikova I. A Cylindrical Shell Made of Glass-Metal Composite // *Applied Mechanics and Materials*. 2015. Vol. 756. P. 230–235.
2. Любимова О., Морковин А., Дрюк С. Особенности структуры зоны соединения стекла и стали в технологии получения стеклометаллокомпозита // *Материаловедение*. 2017. № 4. С. 3–7.
3. Гончарук В., Бочарова А., Ратников А., Голобокова Н. Разработка технологических основ изготовления цилиндрических оболочек из стеклометаллического композита методом центробежного литья // *Труды Самарского научного центра Российской академии наук*. 2016. Т. 18, 2(3). С. 864–868.
4. Гончарук В., Зайко Н., Ратников А., Шелковников К. Экспериментальные исследования адгезионного взаимодействия в зоне контакта стекла и алюминия в стеклометаллокомпозитном элементе // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, серия: механика предельного состояния*. 2023. 4(58). С. 26–36.

5. Бойчук А., Чертищев В., Диков И., Генералов А. Особенности ультразвукового контроля ремонта монолитных зон вертолетных лопастей из полимерных композиционных материалов // Труды ВИАМ. 2023. 12 (130). С. 115–124. URL: <http://www.viam-works.ru>, DOI: 10.18577/2307-6046-2023-0-12-115-124.
6. Зайко Н., Любимова О. Температурные напряжения в соосных сопряженных цилиндрических системах и композиционных материалах с разной степенью проскальзывания по границе контакта // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. 4 (54). С. 5–13.
7. Арутюнян Н., Манжиров А., Наумов В. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 172 с.
8. Kalker J. Variational and non-variational theory of frictionless adhesive contact between elastic bodies // Wear. 1987. Vol. 119, no. 1. P. 63–76.
9. Сайфуллин Э., Князева А. Моделирование структуризации в адгезионном слое при создании многослойных объектов // Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 15, № 1. С. 5–18.
10. Мазурин О., Лебедева Р., Старцев Ю. Метод расчета напряжений в спаях стекла со стеклом // Физика и химия стекла. 1980. Т. 6. С. 190–194.
11. Горячева И., Фельдштейн И. Анализ влияния внутренней системы дефектов на напряженное состояние упругих тел // Известия РАН. Механика твердого тела. 1996. № 5. С. 55–61.
12. Горячева И., Торская Е. Напряженное состояние двухслойной упругой основы с неполным сцеплением слоев // Трение и износ. 1998. Т. 19, № 3. С. 289–296.
13. Горячева И. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
14. Буренин А., Ткачева А. О сборке горячей посадкой упруговязкопластического диска с некруговым включением // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2024. № 5. С. 29–47.
15. Крагельский И., Добычин М. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 528 с.
16. Чичинадзе А., Браун Э., Буше Н. и др. Основы трибологии (трение, износ, смазка). М.: Машиностроение, 2001. 664 с.
17. Шустер Л. Адгезионное взаимодействие твердых металлических тел. Уфа: Гилем, 1999. 199 с.
18. Марков Д. Трибология и ее применение на железнодорожном транспорте: Труды ВНИИЖТ. М.: Интекст, 2007. 408 с.
19. Морозов И., Беляев А., Изюмов Р. Индентирование слоя на упругой подложке: влияние толщины и модуля упругости покрытия // Вычислительная механика сплошных сред. 2025. Т. 18, № 1. С. 57–67.
20. Филиппенко Г. Энергетический анализ осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки, нагруженной периодическими сосредоточенными массами // Вычислительная механика сплошных сред. 2024. Т. 17, № 3. С. 276–289.
21. Lyubimova O., Barbotko M., Streltsov A. Experimental investigations of varying the temperature parameters in the glass-transition range for glass-metal composites when heated // Materials Physics and Mechanics. 2023. Vol. 51, no. 3. P. 52–58.

REFERENCES

1. Pikul V., Goncharuk V., Maslennikova I. A Cylindrical Shell Made of Glass-Metal Composite // *Applied Mechanics and Materials*. 2015. Vol. 756. P. 230–235. (in Russian).
2. Lyubimova O., Morkovin A., Dryuk S. Features of the Structure of the Glass-Steel Joint Zone in the Technology of Producing Glass-Metal Composite // *Materialovedenie*. 2017. No. 4. P. 3–7. (in Russian).
3. Goncharuk V., Bocharova A., Ratnikov A., Golobokova N. Development of Technological Bases for Manufacturing Cylindrical Shells from Glass-Metal Composite by Centrifugal Casting // *Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 2016. Vol. 18, 2(3). P. 864–868. (in Russian).
4. Goncharuk V., Zayko N., Ratnikov A., Shelkovnikov K. Experimental Studies of Adhesive Interaction in the Contact Zone of Glass and Aluminum in a Glass-Metal Composite Element // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Series: Mechanics of the Limit State*. 2023. 4(58). P. 26–36. (in Russian).
5. Boychuk A., Chertishchev V., Dikov I., Generalov A. Features of Ultrasonic Inspection of Repair of Monolithic Zones of Helicopter Blades Made of Polymer Composite Materials // *Proceedings of VIAM*. 2023. 12 (130). P. 115–124. (in Russian).
6. Zayko N., Lyubimova O. Temperature Stresses in Coaxial Conjugate Cylindrical Systems and Composite Materials with Different Degrees of Slip along the Contact Boundary // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Series: Mechanics of the Limit State*. 2022. 4 (54). P. 5–13. (in Russian).
7. Arutyunyan N., Manzhairov A., Naumov V. Contact Problems of Mechanics of Growing Bodies. M.: Nauka, 1991. 172 p. (in Russian).
8. Kalker J. Variational and non-variational theory of frictionless adhesive contact between elastic bodies // *Wear*. 1987. Vol. 119, no. 1. P. 63–76. (in Russian).
9. Saifullin E., Knyazeva A. Modeling of Structurization in the Adhesive Layer during the Creation of Multilayer Objects // *Computational Continuum Mechanics*. 2023. Vol. 15, no. 1. P. 5–18. (in Russian).
10. Mazurin O., Lebedeva R., Startsev Y. Method for Calculating Stresses in Glass-to-Glass Seals // *Physics and Chemistry of Glass*. 1980. Vol. 6. P. 190–194. (in Russian).
11. Goryacheva I., Feldshtein I. Analysis of the Influence of Internal Defect System on the Stress State of Elastic Bodies // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids*. 1996. No. 5. P. 55–61. (in Russian).
12. Goryacheva I., Torskaya E. Stress State of a Two-Layer Elastic Base with Incomplete Bonding of Layers // *Friction and Wear*. 1998. Vol. 19, no. 3. P. 289–296. (in Russian).
13. Goryacheva I. *Mechanics of Frictional Interaction*. M.: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian).
14. Burenin A., Tkacheva A. On the Assembly by Hot Interference Fit of an Elastoviscoplastic Disk with a Non-Circular Inclusion // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids*. 2024. No. 5. P. 29–47. (in Russian).
15. Kragelsky I., Dobychin M. *Fundamentals of Friction and Wear Calculations*. M.: Mashinostroenie, 1977. 528 p. (in Russian).
16. Chichinadze A., Braun E., Bushe N., et al. *Fundamentals of Tribology (Friction, Wear, Lubrication)*. M.: Mashinostroenie, 2001. 664 p. (in Russian).

17. Shuster L. Adhesive Interaction of Solid Metal Bodies. Ufa: Gilem, 1999. 199 p. (in Russian).
18. Markov D. Tribology and Its Application in Railway Transport: Proceedings of VNIIZhT. M.: Intext, 2007. 408 p. (in Russian).
19. Morozov I., Belyaev A., Izyumov R. Indentation of a Layer on an Elastic Substrate: Influence of Coating Thickness and Elastic Modulus // Computational Continuum Mechanics. 2025. Vol. 18, no. 1. P. 57–67. (in Russian).
20. Filippenko G. Energy Analysis of Axisymmetric Vibrations of a Cylindrical Shell Loaded with Periodic Concentrated Masses // Computational Continuum Mechanics. 2024. Vol. 17, no. 3. P. 276–289. (in Russian).
21. Lyubimova O., Barbotko M., Streltsov A. Experimental investigations of varying the temperature parameters in the glass-transition range for glass-metal composites when heated // Materials Physics and Mechanics. 2023. Vol. 51, no. 3. P. 52–58. (in Russian).