

В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ АРОК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ НЕРАСТЯЖИМЫМИ НИТЯМИ

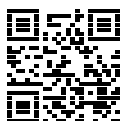
*Федеральный исследовательский центр Коми научный центр УрО РАН,
Сыктывкар, Россия*

Аннотация. Рассматривается задача устойчивости системы двух круговых арок, связанных между собой нерастяжимыми нитями. Нити не выдерживают сжимающих усилий. Данная задача относится к области контактных задач с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкции. Проблема сводится к отысканию точек бифуркации некоторой задачи нелинейного программирования, что приводит к необходимости решать задачу идентификации положительной определенности квадратичных форм на выпуклых конусах. В свою очередь это приводит к необходимости решения задачи минимизации квадратичной формы на конусе при условии, что некоторая другая квадратичная форма сохраняет постоянное значение.

Ключевые слова: устойчивость, круговая арка, вариационная задача, бифуркация, односторонние ограничения, критическая сила.

Андрюкова Вероника Юрьевна, к. ф.-м. н., научный сотрудник; e-mail: veran@list.ru; AuthorID: 762458

Тарасов Владимир Николаевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник; e-mail: vntarasov@ipm.komisc.ru; AuthorID: 3141



для цитирования: Андрюкова В. Ю., Тарасов В. Н. Устойчивость системы арок, подкреплённых нерастяжимыми нитями // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 192-201. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.011. EDN: FMINTP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov

STABILITY OF A SYSTEM OF ARCHES REINFORCED WITH INEXTENSIBLE THREADS

*Federal Research Center Komi Scientific Center of the Ural Branch of the Russian
Academy of Sciences, Syktyvkar, Russia*

Abstract. We consider the stability problem of a system of two circular arches connected by inextensible threads. The threads cannot withstand compressive forces. This problem pertains to the field of contact problems with an unknown region of active interaction between the structural elements. The problem boils down to finding bifurcation points in a nonlinear programming problem, which necessitates identifying the positive definiteness of quadratic forms on convex cones. This, in turn, necessitates solving the problem of minimizing a quadratic form on a cone, provided that some other quadratic form maintains a constant value.

Keywords: stability, circular arc, variational problem, bifurcation, one-sided constraints, critical force.

Veronika Yu. Andryukova, Scientific Researcher, Professor; e-mail: veran@list.ru;
AuthorID: 762458

Vladimir N. Tarasov, Scientific Researcher; e-mail: vntarasov@ipm.komisc.ru;
AuthorID: 3141



to cite this article: Andryukova V. Yu., Tarasov V. N. Stability of a system of arches reinforced with inextensible threads // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 192-201. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.011

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Расчет на устойчивость и прочность сложных тонкостенных конструкций связан с исследованием вариационных неравенств или решением вариационных задач с ограничениями на искомые функции в форме неравенств [1]. Арочные конструкции применяют в разных областях, включая строительство, архитектуру, машиностроение. Конструкции висячих систем, в которых несущими элементами являются ванты из высокопрочных материалов, работающих только на растяжение, получают наиболее легкими, что является их существенным преимуществом. Расчет на прочность тонких систем сводится к решению задачи выпуклого нелинейного программирования. Особенно сложной проблемой является исследование конструкций на устойчивость. Интересные частные задачи устойчивости и закритического поведения упругих элементов конструкций при односторонних ограничениях на перемещения решены в книге В.И. Феодосьева [2]. Проблема устойчивости круговых арок ранее рассматривалась Е.Л. Николаи [3]. Экспериментальные и численные исследования влияния односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек, сжимаемых продольной силой рассмотрены в работе Н.А. Алфутова [4]. Наличие односторонних ограничений на перемещение приводит к задаче идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах, которая рассматривалась в работах [5], [6]. При конечномерной аппроксимации наличие односторонних ограничений на перемещения приводит к некоторой задаче нелинейного программирования. При исследовании на устойчивость в данном случае приходим к задаче нахождения параметров нагрузки, при которых происходит бифуркация решений задачи нелинейного программирования. Некоторые задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения и методы их решения рассматривались в работах авторов [7], [8], [9].

1. Постановка задачи. Пусть две круговые арки (рис. 1) связаны между собой нерастяжимыми нитями, которые не выдерживают сжимающих усилий, нагружены внешними силами, равномерно распределенными вдоль линии арок.

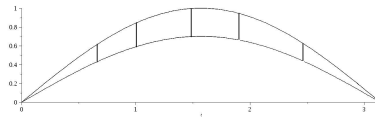


Рис. 1. Схема подкрепления арок

Уравнения недеформированной оси арок имеют вид:

$$x_i = R_i \cos \varphi, \quad y_i = R_i \sin \varphi, \quad \varphi \in (-\tau, \tau), \quad i = 1 : 2.$$

R_i — радиусы арок.

Обозначим $\xi = (-\cos \varphi, -\sin \varphi)$, $\eta = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ – единичные векторы касательной и нормали. u_i, w_i – перемещения вдоль векторов η и ξ . Тогда изменение кривизны арок в результате деформации определяется формулами

$$\delta q_i = \frac{1}{R_i^2}(u_i'' + u_i).$$

Предполагается, что выполнено условие несжимаемости $u_i = w_i'$, $i = 1; 2$. Упругая энергия

$$U = U_1 + U_2 = \frac{B_1}{2R_1^3} \int_{-\tau}^{\tau} (u_1'' + w_1')^2 d\varphi + \frac{B_2}{2R_2^3} \int_{-\tau}^{\tau} (u_2'' + w_2')^2 d\varphi.$$

Работа внешних сил зависит от поведения нагрузки и определяется:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{P_1}{2} \int_{-\tau}^{\tau} (u_1'^2 - k_1 u_1^2) d\varphi + \frac{P_2}{2} \int_{-\tau}^{\tau} (u_2'^2 - k_2 u_2^2) d\varphi,$$

где $k_i = 1$, если нагрузка P_i направлена все время по нормали к деформированной оси (нормальные силы) и $k_i = 2$, если P_i направлена к центру кривизны недеформированной арки (центральные силы).

Предположим, что арки связаны нерастяжимыми нитями, один конец которых закреплен в некоторых точках на первой арке, а другой – к точкам второй арки при углах $\tau = \tau_j$ $j \in 1 : M$.

Нити не выдерживают сжимающих усилий, поэтому расстояние между точками прикрепления не может увеличиваться:

$$u_2(\tau_j) - u_1(\tau_j) \leq 0, \quad j \in 1 : M. \quad (1)$$

В положении равновесия полная энергия системы арок достигает минимального значения, таким образом, приходим к задаче на экстремум:

$$U - V \rightarrow \min_{u_i, w_i} \quad (2)$$

при выполнении условий несжимаемости $u_i = w_i'$, $i = 1; 2$ и ограничений (1). Далее рассмотрим граничные условия:

- 1) жесткой заделки: $u_i = 0, w_i = 0, u_i' = 0$ при $\varphi = -\tau, \tau$.
- 2) шарнирного опирания: $u_i = 0, w_i = 0, u_i' + w_i' = 0$ при $\varphi = -\tau, \tau$.

При наличии ограничений (1) задачу (1)–(2) можно исследовать только численными методами.

2. Численный метод Будем аппроксимировать искомые четыре функции $u_1(\varphi), u_2(\varphi), w_1(\varphi), w_2(\varphi)$ интерполяционными кубическими сплайнами вида [10]:

$$S(z, \varphi) = z_i(1-t)^2(1+2t) + z_{i+1}t^2(3-2t) + m_i h t(1-t)^2 - m_{i+1} h t^2(1-t), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} z &\in R^n, \quad \varphi_i = -\tau + ih, \\ m_i &= S'(z, \varphi_i), \quad i = 0, \dots, n+1, \\ h &= \varphi_{i+1} - \varphi_i, \quad t = (\varphi - \varphi_i)/h, \quad t \in [0..1]. \end{aligned}$$

Условие непрерывности второй производной записывается в виде [10]:

$$\begin{aligned} 2m_0 + \mu_0^* m_1 &= c_0^*, \\ \lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} &= c_i \quad i = 1, \dots, N-1 \\ \lambda_N^* m_{N-1} + 2m_N &= c_N^*, \end{aligned} \quad (4)$$

причем

$$\begin{aligned} c_i &= 3 \left(\mu_i \frac{z_{i+1} - z_i}{h} + \lambda_i \frac{z_i - z_{i-1}}{h} \right), \\ \mu_i &= \lambda_i = 0, 5. \end{aligned}$$

Здесь для граничных условий шарнирного опирания

$$\mu_0^* = \lambda_N^* = 1, \quad c_0^* = 3 \frac{z_1}{h}, \quad c_N^* = -3 \frac{z_{N-1}}{h}.$$

Окончательно получаем, если интерполируются функции $u_i(\varphi)$ и выполнены граничные условия шарнирного опирания, то интерполяционный сплайн $S(z, \varphi)$ удовлетворяет условиям

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = 0, \quad m_0 = \frac{3}{h} z_1 - \frac{1}{2} m_1, \quad m_{n+1} = \frac{3}{h} z_n - \frac{1}{2} m_n, \quad (5)$$

Аналогично, если интерполируются функции $w_i(\varphi)$, и выполнены условия жесткой заделки, то сплайн удовлетворяет соотношениям

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = 0, \quad m_0 = 0, \quad m_{n+1} = 0. \quad (6)$$

Определим вектор $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$. Тогда m может быть вычислен по формуле:

$$m = C^{-1} M u,$$

где матрицы C и M имеют вид:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}, \\ M &= \frac{3}{2h} \begin{pmatrix} c & d & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -d & c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

где $a = 4$, $b = 1$, $c = 0$, $d = -1$ если сплайн $S(z, \varphi)$ удовлетворяет на концах интервала $[-\tau, \tau]$ условиям (6), и $a = 3.5$, $b = 1$, $c = -0.5$, $d = 1$, если выполняются условия (5).

Введем в рассмотрение векторы $v \in R^{4n}$:

$$\begin{aligned} v_i &= u_1(\varphi_i), \quad i \in [1, \dots, n], \\ v_i &= w_1(\varphi_i), \quad i \in [n+1, \dots, 2n], \\ v_i &= u_2(\varphi_i), \quad i \in [2n+1, \dots, 3n], \\ v_i &= w_2(\varphi_i), \quad i \in [3n+1, \dots, 4n], \end{aligned}$$

и построим интерполяционные сплайны $S(v, \varphi)$.

Для того, чтобы учесть условие несжимаемости введем штрафную функцию:

$$F = \frac{D}{2} \int_{-\tau}^{\tau} \left(u - w' \right)^2 d\varphi,$$

где D – достаточно, большое число, которое определяется опытным путем в численных экспериментах.

Рассмотрим вариационную задачу:

$$U + F \rightarrow \min_{u, w \in \Gamma}, \quad (7)$$

$$V = 1 \quad (8)$$

при граничных условиях шарнирного опирания или жесткой заделки и выполнении неравенств (1).

Пусть u_*, w_* – решение задачи (7), (8), (1) и λ_* – значение функционала U . Тогда для любого $\lambda \leq \lambda_*$ выполняется

$$U - \lambda V \geq 0$$

для всех $(u_i, w_i) \in \Gamma$, и наоборот, если $\lambda > \lambda_*$, то найдутся функции $(u_i, w_i) \in \Gamma$ такие, что

$$U - \lambda V < 0,$$

то есть $P^* = \frac{B}{R^3} \lambda_*$ имеет смысл критической нагрузки: при $P \leq P^*$ задача (7), (8) имеет только тривиальное решение, при $P > P^*$ выполняется неравенство $U < 0$.

После подстановки сплайнов $S(v, \varphi)$ в (2) получаем две квадратичные формы:

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{\tau} \left(\frac{d^2 S}{d\varphi^2} + S \right)^2 d\varphi + \frac{D}{2} \int_{-\tau}^{\tau} \left(S - \tilde{S}' \right)^2 d\varphi = \frac{1}{2} (Gv, v), \\ q &= \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{\tau} \left(S'^2 - kS^2 \right) d\varphi = \frac{1}{2} (Qv, v). \end{aligned}$$

Для определения коэффициентов квадратичных форм необходимо вычислить следующие интегралы:

1. Интеграл от квадрата сплайна

$$\begin{aligned} \int_{-\tau}^{\tau} S^2(t) dt &= h \sum_{i=0}^n \frac{11}{105} v_i m_i h - \frac{13}{210} v_i m_{i+1} h + \frac{13}{210} m_i h v_{i+1} - \frac{1}{70} m_i h^2 m_{i+1} - \\ &- \frac{11}{105} v_{i+1} m_{i+1} h + \frac{13}{35} v_i^2 + \frac{1}{105} m_i^2 h^2 + \frac{9}{35} v_i v_{i+1} + \frac{13}{35} v_{i+1}^2 + \frac{1}{105} m_{i+1}^2 h^2. \end{aligned}$$

2. Интеграл от квадрата первой производной

$$\int_{-\tau}^{\tau} S'^2(t)dt = \frac{1}{5h} \sum_{i=0}^n \left(v_i m_i h + v_i m_{i+1} h - m_i h v_{i+1} - \frac{1}{3} m_i h^2 m_{i+1} - \right. \\ \left. - v_{i+1} m_{i+1} h + 6v_i^2 + \frac{2}{3} m_i^2 h^2 - 12v_i v_{i+1} + 6v_{i+1}^2 + \frac{2}{3} m_{i+1}^2 h^2 \right).$$

3. Интеграл от квадрата второй производной

$$\int_{-\tau}^{\tau} S''^2(t)dt = \frac{1}{h^3} \sum_{i=0}^n (12v_i^2 + 12v_i m_{i+1} h - 24v_i v_{i+1} + 12v_i m_i h - \\ - 12v_{i+1} m_{i+1} h + 4m_i h^2 m_{i+1} + 4m_{i+1}^2 h^2 + 12v_{i+1}^2 - 12m_i h v_{i+1} + \\ + 4m_i^2 h^2).$$

4. Интеграл от произведения второй производной и сплайна

$$\int_{-\tau}^{\tau} S''(t) \cdot \tilde{S}(t)dt = \frac{1}{10} \sum_{i=0}^n (v_{n+i+1} m_i h - \tilde{m}_i h v_{i+1} - v_{i+n} m_i h + \tilde{m}_i h v_i - \\ - \tilde{m}_{i+1} h v_i - v_{n+i+1} m_{i+1} h + v_{i+n} m_{i+1} h + \frac{1}{6} \tilde{m}_i h^2 m_{i+1} + \tilde{m}_{i+1} h v_{i+1} - \\ - \frac{1}{6} \tilde{m}_{i+1} h^2 m_i + 5v_{n+i+1} v_i + 5v_{n+i+1} v_{i+1} - 5v_{n+i} v_i - 5v_{n+i} v_{i+1}) ,$$

числа $v_0, v_{n+1}, m_0, m_{n+1}$ (в зависимости от граничных условий) определяются формулами (6) или (5).

Приходим к конечномерной задаче оптимизации:

$$g(v) = \frac{1}{2}(Gv, v) \rightarrow \min_{v \in R^{4n}} \quad (9)$$

$$q(v) = \frac{1}{2}(Qv, v) = 1, \quad (10)$$

$$(a_j, v) \leq 0, \quad j \in 1..M. \quad (11)$$

В (11) векторы $a_j \in R^{4n}$ получаются в результате подстановки сплайнов $S(v, \varphi)$ в (1). Квадратичные формы $g(v)$ и $q(v)$ положительно определены, если $\alpha < \pi$.

Обозначим через Γ , конус определяемым неравенствами (11).

Пусть v_* – решение задачи (9)–(11). Тогда по теореме Куна–Таккера найдутся множители Лагранжа λ_* и $\tau_j, \tau_j \geq 0, j \in 1..M$, такие, что

$$\begin{cases} Gv_* - \lambda_* Qv_* + \sum_{j=1}^M \tau_j a_j = 0, \\ \tau_j (a_j, v) = 0, \quad j \in 1..M. \end{cases} \quad (12)$$

У системы уравнений (12) есть необходимые условия экстремума, но так, как задача (9)–(11) не является задачей выпуклого программирования, то эти условия не являются достаточными. Точки v_* , удовлетворяющие (12) будем называть стационарными.

Для решения задачи (12) необходимо применять методы глобальной оптимизации (например метод ветвей и границ), число переменных может быть велико, а в данном случае трудоемкость метода ветвей и границ определяется размерностью задачи.

Поскольку метод ветвей и границ является довольно трудоемким, в данном случае можно предложить метод перебора вариантов, который в сочетании с локальным алгоритмом, описанным ниже, может оказаться более предпочтительным.

Пусть v_* – решение задачи (10)–(12) и $\lambda_* = U(v_*)$.

$$P_1^* = \lambda_* P_1, \quad P_2^* = \lambda_* P_2$$

– значения критических нагрузок.

Задача решается методом последовательных приближений.

Пусть $v^0 \in \Gamma$, $q(v^0) = 1$ – некоторое приближение. Пусть уже получена точка $v^k \in \Gamma$, $q(v^k) = 1$.

Обозначим множество $\Omega_k = \{v \in \Gamma \mid (Qv^k, v - v^k) = 0\}$. Найдем точку $\tilde{v}^k$, такую что $f(\tilde{v}^k) = \min_{v \in \Omega_k} f(v)$.

Полагаем $v^{k+1} = \frac{\tilde{v}^k}{\sqrt{g(\tilde{v}^k)}}$. Очевидно, $g(\tilde{v}^{k+1}) = 1$.

Можно показать, что любая предельная точка последовательности v^k , $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяет необходимым условиям экстремума задачи (9)–(11).

3. Результаты вычислений Без ограничения общности можно положить $B_1 = 1$, $B_2 = 1$, $R_1 = 1$, $R_2 = c_0 R_1$. Полагаем $P_2 = 0$ при граничных условиях жесткой заделки.

При вычислениях считаем $n = 40$, $M = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36\}$.

При $\tau = \frac{\pi}{2}$ безразмерное значение параметра критической нагрузки без ограничений на перемещения при $k = 2$ (центральная нагрузка) значение параметра $\lambda_0 = 8.0$.

Если $R_2 = c_0 R_1$, при наличии ограничений (2) значение параметра критической нагрузки λ приведено в таблице 1.

c_0	k_1	λ
0.8	2	31.02
0.8	1	23.47
0.5	2	89.83
0.5	1	69.37
0.25	2	109.07
0.25	1	107.3
0.1	2	109.3
0.1	1	107.45

Таблица 1. Таблица значений критического параметра в зависимости от радиуса R_2

Форма потери устойчивости приведены на рис. 2.

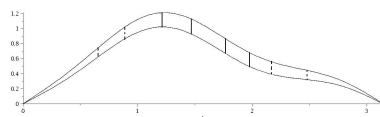


Рис. 2. Форма потери устойчивости системы арок

Наличие односторонних ограничений на перемещения арок значительно увеличивает критическую нагрузку. При этом результаты численных экспериментов показывают, что при $R_2 \rightarrow 0$ критическое давление быстро сходится к некоторому значению, которое зависит от угла τ .

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках госзадания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН (проект 125031203621-2).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors' contribution is equal.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Physics and Mathematics Institute of the Komi Scientific Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (project 125031203621-2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюво Г., Лиос Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 382 с.
2. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. 376 с.
3. Николаи Е. Л. Труды по механике. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. 584 с.
4. Алфутов Н. А., Еремичев А. Н. Влияние односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Расчеты на прочность. 1989. № 1. С. 179–188.
5. Крепс В. Л. О квадратичных формах, неотрицательных на ортанте // ЖВ-МиМФ. 1984. 1 (14). С. 497–503. EDN: NMAKBS.
6. Рапопорт Л. Б. Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы на конусе // Рапопорт Л.Б. 1986. 4 (50). С. 674–679. EDN: SBGRZR.
7. Андриюкова В. Ю. Некоторые конструктивно-нелинейные задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. 4 (7). С. 412–422. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.39. EDN: UWFIXD.

8. Andryukova V., Tarasov V. Nonsmooth problem of stability for elastic rings // Abstracts of the International Conference “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. 2017. No. 1. P. 213–218. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973928.
9. Tarasov V. N. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the International Conference “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. 2017. No. 1. P. 332–334. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7974024.
10. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

REFERENCES

1. Duvaux G., Lios J.-L. Inequalities in mechanics and physics. M.: Science, 1980. 382 p. (in Russian).
2. Feodosyev V. I. Selected problems and questions on strength of materials. M.: Nauka, 1967. 376 p. (in Russian).
3. Nikolai E. L. Works on mechanics. M.: Publishing house of technical, theoretical literature, 1955. 584 p. (in Russian).
4. Alfutov N. A., Eremichev A. N. The influence of one-way constraints on the stability of cylindrical shells under axial compression // Strength calculations. 1989. No. 1. P. 179–188. (in Russian).
5. Kreps V. L. On quadratic forms that are non-negative on the orthant // ZhVMiMF. 1984. 1 (14). P. 497–503. EDN: NMAKBS. (in Russian).
6. Rapoport L. B. Lyapunov stability and sign-definiteness of a quadratic form on a cone // PMM. 1986. 4 (50). P. 674–679. EDN: SBGRZR. (in Russian).
7. Andryukova V. Y. Some structurally nonlinear problems of stability of elastic systems under one-sided constraints on displacements // Computational continuum mechanics. 2014. 4 (7). P. 412–422. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.39. (in Russian).
8. Andryukova V., Tarasov V. Nonsmooth problem of stability for elastic rings // Abstracts of the International Conference “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. 2017. No. 1. P. 213–218. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973928. (in Russian).
9. Tarasov V. N. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the International Conference “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. 2017. No. 1. P. 332–334. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7974024. (in Russian).
10. Zavyalov Y. S., Kvasov, B. I. Miroshnichenko V. L. Spline function methods. M.: Nauka, 1980. 352 p. (in Russian).