

КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ И ИЗГИБОВ–КРУЧЕНИЙ В СЛУЧАЕ ГЕМИТРОПНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЫ

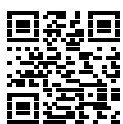
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В настоящем исследовании рассматривается каноническое преобразование деформаций и изгибов–кручения для гемитропной микрополярной упругой среды. Энергия деформации такой среды рассматривается как функция, зависящая от несимметричных тензоров деформации и изгиба–кручения, которые трактуются как термодинамические переменные состояния. Приведено А-представление энергии деформации гемитропной микрополярной упругой среды, характеризующейся 9 изоэнтропийными механическими модулями. Квадратичная форма энергии деформации диагонализуетс методом выделения полных квадратов. Получены матрицы перехода от исходных переменных к новым (каноническим, сопряженным по остаточной энергии деформации).

Ключевые слова: энергия деформации, внутренняя энергия, гемитропная микрополярная среда, упругость, диагонализация, каноническая квадратичная форма, канонические переменные.

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики новых материалов и технологий; **e-mail:** murashkin@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории механики новых материалов и технологий; **e-mail:** radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



для цитирования: Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Каноническое преобразование деформаций и изгибов–кручений в случае гемитропной микрополярной среды // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 215–231. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.014. EDN: WUCMTZ

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

CANONICAL TRANSFORMATION OF STRAINS AND BEND-TWISTS FOR A HEMITROPIC MICROPOLAR MEDIUM

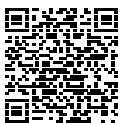
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. This study considers the canonical transformation of strains and bending-torsion for a hemitropic micropolar elastic medium. The strain energy of such a medium is considered as a function dependent on asymmetric strain and bending-torsion tensors, which are treated as thermodynamic state variables. An A-representation of the strain energy of a hemitropic micropolar elastic medium characterized by nine isentropic mechanical moduli is presented. The quadratic form of the strain energy is diagonalized using the perfect squares method. Transition matrices from the original variables to new ones (canonical, conjugate with respect to the residual strain energy) are obtained.

Keywords: strain energy, internal energy, hemitropic micropolar medium, elasticity, diagonalization, canonical quadratic form, canonical variables

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; **e-mail:** evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; **e-mail:** radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



to cite this article: Murashkin E. V., Radayev Y. N. Canonical transformation of strains and bend-twists for a hemitropic micropolar medium // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 215–231. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.014

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Предварительные замечания и вводная информация. Построение энергетических форм является актуальной задачей математического моделирования механического поведения деформируемых сред [Kessel1964, 1—14]. Указанные энергетические формы используются при формулировке вариационных принципов и выводе дифференциальных уравнений движения деформируемого тела. Кроме этого, исследование самой энергетической формы позволяет сформулировать условия устойчивости равновесия упругого тела. Проще всего получить такие условия если преобразовать квадратичную форму энергии деформации к каноническому виду, как это было сделано в работах [15—17]. В настоящем исследовании найдены законы преобразования формальных переменных к новым (каноническим, сопряженным по остаточной энергии деформации).

В основе исследования лежат понятия, терминология, обозначения, методы и результаты, представленные в предыдущих работах авторов [10, 11, 15—22].

Микрополярное твердое тело называется гемитропным, если компоненты определяющих тензоров инвариантны относительно группы полуизометрических преобразований трехмерного евклидова пространства, а именно группы ортогональных преобразований, исключая зеркальные отражения и инверсии трехмерного пространства. В этом случае правильная запись основных уравнений представляется в формализме псевдотензоров, но простой алгоритм преобразования псевдотензора в соответствующий абсолютный тензор помогает нам отложить в сторону формализм псевдотензоров и затем представить исследование в терминах абсолютных тензоров.

2. Энергетическая форма гемитропного микрополярного упругого тела. Введем энергию деформации $\mathcal{U}$ в расчете на единичный инвариантный элемент объема при постоянной энтропии ($S = \text{const}$), как это, например, сделано в работах [11, 20, 21], следующим образом

$$U \Big|_{\text{adiabatic}} = \mathcal{U}(\epsilon_{(ij)}, \kappa_{(ij)}, \varphi_i, \kappa_i). \quad (1)$$

Причем функциональные аргументы определяются через трансляционные u_i и спинорные ϕ_i перемещения согласно соотношениям

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \partial_i u_j - e_{ijk} \varphi_k, & 2\epsilon_{(ij)} &= \partial_i u_j + \partial_j u_i, & \kappa_{ij} &= \partial_i \phi_j, \\ \kappa_{(ij)} &= \partial_i \phi_j + \partial_j \phi_i, & \varphi_i &= \phi_i - \frac{1}{2} e_{ikl} \partial_k u_l, & \kappa_i &= \frac{1}{2} e_{ijs} \kappa_{[js]}. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) используются следующие обозначения: ϵ_{ij} — асимметричный тензор деформаций; κ_{ij} — асимметричный тензор изгиба-кручения; u_i — трансляционные перемещения; ϕ_i — спинорные перемещения; ∂_i обозначает частную производную по пространственной координате x_i ; e_{ijk} — дискриминантный тензор (тензор Леви-Чивиты); φ_i — относительные микроповороты; круглые скобки обозначают алгебраическую симметризацию; квадратные скобки обозначают алгебраическое альтернирование.

Термодинамический смысл энергии деформации аналогичен внутренней энергии, поскольку мы ограничиваемся изоэнтропийными (адиабатическими) процессами. В большинстве доступных исследований внутренняя энергия вводится как термодинамический потенциал состояния на единицу инвариантного объема и обозначается U .

Энергия деформации $\mathcal{U}$ инвариантна относительно вращений и трансляций пространства, а также относительно преобразований пространственной инверсии и зеркальных отражений, т.е. относительно полной изометрической группы. Нет никаких препятствий отказаться от инвариантности $\mathcal{U}$, т.е. можно в принципе вести речь об изменении энергии при зеркальных отражениях.³ Существуют три различных подхода к определению энергии деформации, подробно описанные в статье [11]. А-представление [10] основано на понятиях теории рациональных алгебраических инвариантов, являясь линейной оболочкой индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов несимметричного тензора деформации и пространственного градиента поля микровращений. Основы теории целых рациональных алгебраических инвариантов подробно обсуждаются в фундаментальных монографиях [23, 24]. В исследованиях П.А. Жилина [25] также рассматривается такой же круг вопросов, однако форма представления служит препятствием к пониманию существа дела и дальнейшего использования.

Инварианты, принадлежащие полной неприводимой системе индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических квадратичных инвариантов симметричных компонент несимметричных тензоров деформации, тензора изгиба-кручения и связанных с ними векторов для гемитропного твердого тела, вычисляются в декартовых координатах следующим образом [26]

$$\begin{aligned} \overset{1}{I} &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(ik)} \epsilon_{(lm)}, & \overset{2}{I} &= \delta_{ik} \delta_{lm} \kappa_{(ik)} \kappa_{(lm)}, & \overset{3}{I} &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(il)} \epsilon_{(km)}, \\ \overset{4}{I} &= \delta_{ik} \delta_{lm} \kappa_{(il)} \kappa_{(km)}, & \overset{5}{I} &= \delta_{ik} \varphi_i \varphi_k, & \overset{6}{I} &= \delta_{ik} \kappa_i \kappa_k, \\ \overset{7}{I} &= \delta_{ik} \delta_{lm} \epsilon_{(ik)} \kappa_{(lm)}, & \overset{8}{I} &= \epsilon_{(ik)} \kappa_{(ik)}, & \overset{9}{I} &= \kappa_k \varphi_k, \end{aligned} \quad (3)$$

где δ_{lm} — символ Кронекера.

Вышеизложенные рассуждения приводят нас к А-представлению энергии деформации гемитропного микрополярного упругого твердого тела как линейной оболочке инвариантов (3):

$$\mathcal{U} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^9 A_{\mathfrak{c}} \overset{\mathfrak{c}}{I}, \quad (4)$$

где $A_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \dots, 9$) — произвольные (определяющие) постоянные. Очевидно эти константы могут интерпретироваться как определяющие упругие модули (абсолютные скаляры) при задании модели гемитропного микрополярного упругого твердого тела.

³Авторам неизвестны физические теории, в которых предполагался бы отказ от инвариантности энергии.

В силу формул (3) для инвариантов I_c ($c = 1, \dots, 9$) энергия деформации (1) представляется в виде (см. [10, 11, 20]):

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & A\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + A\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(is)}\kappa_{(lm)} + A\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(il)}\epsilon_{(sm)} + \\ & + A\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(il)}\kappa_{(sm)} + A\delta_{is}\varphi_i\varphi_s + A\delta_{is}\kappa_i\kappa_s + \\ & + A\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(is)}\kappa_{(lm)} + A\epsilon_{(is)}\kappa_{(is)} + A\kappa_i\varphi_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Для унификации применения алгебраических алгоритмов диагонализации мы вводим формальные замены независимых переменных состояния $\epsilon_{(ij)}$, $\kappa_{(ij)}$, φ_i , κ_i энергии деформации $\mathcal{U}$ согласно следующим правилам:

$$\begin{aligned} \epsilon_{(11)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{1}}, & \kappa_{(11)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{7}}, & \varphi_1 &\longleftrightarrow Y_{\underline{13}}, & \kappa_1 &\longleftrightarrow Y_{\underline{16}}, \\ \epsilon_{(22)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{2}}, & \kappa_{(22)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{8}}, & \varphi_2 &\longleftrightarrow Y_{\underline{14}}, & \kappa_2 &\longleftrightarrow Y_{\underline{17}}, \\ \epsilon_{(33)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{3}}, & \kappa_{(33)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{9}}, & \varphi_3 &\longleftrightarrow Y_{\underline{15}}, & \kappa_3 &\longleftrightarrow Y_{\underline{18}}; \\ \epsilon_{(23)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{4}}, & \kappa_{(23)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{10}}, & & & & \\ \epsilon_{(13)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{5}}, & \kappa_{(13)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{11}}, & & & & \\ \epsilon_{(12)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{6}}, & \kappa_{(12)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{12}}; \end{aligned} \quad (6)$$

где мы подчеркиваем один 18-векторный индекс, чтобы отличить составные двузначные индексы от двух соседних однозначных индексов. Вектор формальных переменных $[Y]$ принадлежит формальному векторному пространству алгебраической размерности 18.

Отметим, что формальные переменные теории микрополярной упругости не подлежат физической интерпретации, по крайней мере на данном этапе и могут быть введены несколькими способами. Изменения рассматриваемых способов нумерации деформаций и изгибов–кручений не принципиальны, но приведут к изменению матрицы квадратичной форм. Тем не менее это нисколько не повлияет на условия положительной определенности квадратичной формы и ее собственные числа. Приведем несколько альтернативных способов нумерации формальных переменных. Если ввести вектор формальных переменных $[Y]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \epsilon_{(11)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{1}}, & \epsilon_{(23)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{7}}, & \varphi_1 &\longleftrightarrow Y_{\underline{13}}, & \kappa_1 &\longleftrightarrow Y_{\underline{16}}, \\ \epsilon_{(22)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{2}}, & \epsilon_{(13)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{8}}, & \varphi_2 &\longleftrightarrow Y_{\underline{14}}, & \kappa_2 &\longleftrightarrow Y_{\underline{17}}, \\ \epsilon_{(33)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{3}}, & \epsilon_{(12)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{9}}, & \varphi_3 &\longleftrightarrow Y_{\underline{15}}, & \kappa_3 &\longleftrightarrow Y_{\underline{18}}; \\ \kappa_{(11)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{4}}, & \kappa_{(23)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{10}}, & & & & \\ \kappa_{(22)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{5}}, & \kappa_{(13)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{11}}, & & & & \\ \kappa_{(33)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{6}}, & \kappa_{(12)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{12}}; \end{aligned} \quad (7)$$

тогда матрица квадратичной формы будет блочно–диагональной, состоящей из трех подматриц алгебраической размерности 6×6 . Одна из указанных подматриц будет полностью заполненной, а две другие — трехдиагональными матрицами. Указанное обстоятельство позволяет наиболее простым способом провести факторизацию характеристического полинома квадратичной энергетической формы гемитропного микрополярного тела.

Наиболее естественной нумерацией, реализованной в работах [15–17], будет следующая:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{(11)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{1}}, & \varphi_1 &\longleftrightarrow Y_{\underline{7}}, & \kappa_{(11)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{10}}, & \kappa_1 &\longleftrightarrow Y_{\underline{16}}, \\
 \epsilon_{(22)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{2}}, & \varphi_2 &\longleftrightarrow Y_{\underline{8}}, & \kappa_{(22)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{11}}, & \kappa_2 &\longleftrightarrow Y_{\underline{17}}, \\
 \epsilon_{(33)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{3}}, & \varphi_3 &\longleftrightarrow Y_{\underline{9}}, & \kappa_{(33)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{12}}, & \kappa_3 &\longleftrightarrow Y_{\underline{18}}; \\
 \epsilon_{(23)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{4}}, & & & \kappa_{(23)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{13}}, & & \\
 \epsilon_{(13)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{5}}, & & & \kappa_{(13)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{14}}, & & \\
 \epsilon_{(12)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{6}}, & & & \kappa_{(12)} &\longleftrightarrow Y_{\underline{15}};
 \end{aligned} \tag{8}$$

Способы введения формальных переменных $Y_{\underline{1}}, \dots, Y_{\underline{18}}$ (6), (7) и (8) для удобства изложения назовем «красной» R-нумерацией, «зеленой» G-нумерацией и «красной» B-нумерацией, соответственно. В дальнейшем изложении настоящего исследования будем пользоваться «красной» R-нумерацией (6).

Следует отметить, что в научных публикациях можно найти и другие способы нумерации. Например, оригинальная нумерация компонент асимметричных тензоров деформации и изгиба–кручения предложена в работе Э.Л. Аэро и Е.В. Кувшинского [5]. Матрица такой квадратичной формы имеет диагональный вид, на главной диагонали которой стоит четыре подматрицы. Одна из указанных подматриц имеет алгебраическую размерность 6×6 , а три другие — алгебраическую размерность 4×4 . Причем все подматрицы оказываются полностью заполнены ненулевыми элементами.

С учетом замен (6) квадратичная форма энергии деформации (5) записывается как:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} = & Y_{\underline{1}}^2(A + A) + Y_{\underline{2}}^2(A + A) + Y_{\underline{3}}^2(A + A) + 2AY_{\underline{4}}^2 + 2AY_{\underline{5}}^2 + 2AY_{\underline{6}}^2 + \\
 & + Y_{\underline{7}}^2(A + A) + Y_{\underline{8}}^2(A + A) + Y_{\underline{9}}^2(A + A) + 2AY_{\underline{10}}^2 + 2AY_{\underline{11}}^2 + 2AY_{\underline{12}}^2 + \\
 & + AY_{\underline{13}}^2 + AY_{\underline{14}}^2 + AY_{\underline{15}}^2 + AY_{\underline{16}}^2 + AY_{\underline{17}}^2 + AY_{\underline{18}}^2 + 2AY_{\underline{1}}Y_{\underline{2}} + 2AY_{\underline{1}}Y_{\underline{3}} + 2AY_{\underline{2}}Y_{\underline{3}} + \\
 & + 2AY_{\underline{7}}Y_{\underline{8}} + AY_{\underline{1}}Y_{\underline{7}} + AY_{\underline{1}}Y_{\underline{8}} + AY_{\underline{2}}Y_{\underline{7}} + AY_{\underline{2}}Y_{\underline{8}} + AY_{\underline{3}}Y_{\underline{7}} + AY_{\underline{3}}Y_{\underline{8}} + AY_{\underline{1}}Y_{\underline{7}} + \\
 & + 2AY_{\underline{10}}Y_{\underline{4}} + 2AY_{\underline{11}}Y_{\underline{5}} + 2AY_{\underline{12}}Y_{\underline{6}} + AY_{\underline{2}}Y_{\underline{8}} + AY_{\underline{13}}Y_{\underline{16}} + AY_{\underline{14}}Y_{\underline{17}} + \\
 & + AY_{\underline{15}}Y_{\underline{18}} + Y_{\underline{9}}(2AY_{\underline{7}} + 2AY_{\underline{8}} + AY_{\underline{1}} + AY_{\underline{2}} + AY_{\underline{3}} + AY_{\underline{3}}). \tag{9}
 \end{aligned}$$

Отметим, что уравнение (9) может быть представлено в компактных матричных обозначениях как:

$$\mathcal{U} = [Y]^\top [A][Y], \tag{10}$$

где

$$[Y]^\top = [Y_{\underline{1}}, Y_{\underline{2}}, Y_{\underline{3}}, Y_{\underline{4}}, Y_{\underline{5}}, Y_{\underline{6}}, Y_{\underline{7}}, Y_{\underline{8}}, Y_{\underline{9}}, Y_{\underline{10}}, Y_{\underline{11}}, Y_{\underline{12}}, Y_{\underline{13}}, Y_{\underline{14}}, Y_{\underline{15}}, Y_{\underline{16}}, Y_{\underline{17}}, Y_{\underline{18}}];$$

$[Y]^\top$ — транспонированный вектор-столбец алгебраической размерности 18, составленный из формальных переменных теории микрополярной упругости; $[A]$ — формальная матрица размерности 18×18 , задающаяся 9 изоэнтропийными

механическими модулями микрополярной среды. В случае гемитропного микрополярного твердого тела формальная матрица $[A]$ имеет следующую структуру:

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & 0 & [A_{13}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [A_{22}] & 0 & [A_{24}] & 0 & 0 \\ [A_{31}] & 0 & [A_{33}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [A_{42}] & 0 & [A_{44}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [A_{55}] & [A_{56}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [A_{65}] & [A_{66}] \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где $[A_{hk}]$ ($h, k = 1, \dots, 6$) — симметричные квадратные подматрицы алгебраической размерности 3×3 , которые задаются микрополярными упругими определяющими постоянными A_a ($a = 1, \dots, 9$) согласно формулам:

$$\begin{aligned} [A_{11}] &= \begin{bmatrix} A_1 + \frac{A_3}{3} & \frac{A_1}{3} & \frac{A_1}{3} \\ \frac{A_1}{3} & A_1 + \frac{A_3}{3} & \frac{A_1}{3} \\ \frac{A_1}{3} & \frac{A_1}{3} & A_1 + \frac{A_3}{3} \end{bmatrix}, \quad [A_{33}] = \begin{bmatrix} \frac{A_2}{2} + \frac{A_4}{4} & \frac{A_2}{4} & \frac{A_2}{4} \\ \frac{A_2}{4} & \frac{A_2}{2} + \frac{A_4}{4} & \frac{A_2}{4} \\ \frac{A_2}{4} & \frac{A_2}{4} & \frac{A_2}{2} + \frac{A_4}{4} \end{bmatrix}, \\ 2[A_{13}] &= 2[A_{31}] = \begin{bmatrix} \frac{A_7}{7} + \frac{A_8}{8} & \frac{A_7}{8} & \frac{A_7}{8} \\ \frac{A_7}{8} & \frac{A_7}{7} + \frac{A_8}{8} & \frac{A_7}{8} \\ \frac{A_7}{8} & \frac{A_7}{8} & \frac{A_7}{7} + \frac{A_8}{8} \end{bmatrix}, \\ 2[A_{56}] &= 2[A_{65}] = \frac{A_9}{9} \text{diag}[1, 1, 1], \quad [A_{24}] = [A_{42}] = \frac{A_8}{8} \text{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{22}] &= \frac{2A_3}{3} \text{diag}[1, 1, 1], \quad [A_{55}] = \frac{A_5}{5} \text{diag}[1, 1, 1], \\ [A_{44}] &= \frac{2A_4}{4} \text{diag}[1, 1, 1], \quad [A_{66}] = \frac{A_6}{6} \text{diag}[1, 1, 1]. \end{aligned} \quad (12)$$

3. Метод диагонализации выделением полных квадратов. Для получения определяющих неравенств мы приводим форму энергии деформации (9) к диагональному (или каноническому) виду, используя простейший и алгоритмический метод линейной алгебры (метод выделения полных квадратов, предложенный Ж.Л. Лагранжем в 1759 г.). В дальнейшем обсуждении подчеркивания под индексами опущены. Отметим, что все коэффициенты при квадратах формальных переменных $Y_1, \dots, Y_{18}$ предполагаются ненулевыми. В противном случае этот метод неприменим.

Преобразуем квадратичную форму (9), последовательно выделяя полный квадрат для каждой формальной переменной, начиная с первой. Сначала перегруппируем все члены, включающие переменную Y_1 . Затем выделим полный квадрат, содержащий эту переменную. Далее примем предварительно выделенный полный квадрат за новую формальную переменную X_1^2 . После этого вычтем полученный полный квадрат, содержащий переменную Y_1 , из квадратичной формы (9). Новая квадратичная форма $\mathcal{U}_{17}$ ⁴ полученная таким образом, не

⁴Индекс остаточной энергии деформации указывает на количество включенных в квадратичную форму формальных переменных.

содержит переменную Y_1 . Затем поступим аналогично относительно формальной переменной Y_2 : вычтем полный квадрат, содержащий Y_2 , из редуцированной квадратичной формы, полученной на предыдущем шаге. Далее найдем новую квадратичную форму, не содержащую формальных переменных Y_1 и Y_2 . Алгоритм следует продолжить вплоть до формальной переменной Y_{18} . Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & (\mathcal{U}_{18} - \mathcal{U}_{17}) + (\mathcal{U}_{17} - \mathcal{U}_{16}) + (\mathcal{U}_{16} - \mathcal{U}_{15}) + (\mathcal{U}_{15} - \mathcal{U}_{14}) + (\mathcal{U}_{14} - \mathcal{U}_{13}) + \\ & + (\mathcal{U}_{13} - \mathcal{U}_{12}) + (\mathcal{U}_{12} - \mathcal{U}_{11}) + (\mathcal{U}_{11} - \mathcal{U}_{10}) + (\mathcal{U}_{10} - \mathcal{U}_9) + (\mathcal{U}_9 - \mathcal{U}_8) + \\ & + (\mathcal{U}_8 - \mathcal{U}_7) + (\mathcal{U}_7 - \mathcal{U}_6) + (\mathcal{U}_6 - \mathcal{U}_5) + (\mathcal{U}_5 - \mathcal{U}_4) + (\mathcal{U}_4 - \mathcal{U}_3) + \\ & + (\mathcal{U}_3 - \mathcal{U}_2) + (\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1) + \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{18}. \end{aligned} \quad (13)$$

В формуле (13) каждая из квадратичных форм $\mathcal{U}_{17}, \mathcal{U}_{16}, \dots, \mathcal{U}_1$ является остаточной энергией деформации по входящим в нее деформациям и изгибам-кручениям.

По итогу выполнения алгоритма отделения квадратов приходим к канонической квадратичной форме диагонального типа относительно новых формальных переменных $X_1, \dots, X_{18}$, которые называются каноническими переменными и вычисляются согласно:

$$X_s = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{U}_{18-s+1}}{\partial Y_s} \quad (s = 1, \dots, 18; \text{ по } s \text{ не суммируется}). \quad (14)$$

Обобщая уравнения (14), представим их в следующем виде:

$$[2X] = \frac{\partial \mathcal{U}_{\text{res}}}{\partial [Y]}. \quad (15)$$

Заметим, что новые формальные переменные $X_1, \dots, X_{18}$, согласно (14), являются сопряженными по отношению к исходным формальным переменным $Y_1, \dots, Y_{18}$ по остаточным энергиям деформации $\mathcal{U}_{18}, \dots, \mathcal{U}_1$. Указанное обстоятельство позволяет выявить физический смысл новых формальных переменных $X_1, \dots, X_{18}$, которые оказываются аналогами силовых и моментных напряжений по отношению к исходным формальным переменным.

Исходная квадратичная форма $\mathcal{U}$ в новых формальных переменных $X_1, \dots, X_{18}$ принимает каноническое диагональное представление:

$$\mathcal{U}_{\text{diag}} = \sum_{s=1}^{18} \frac{X_s^2}{a_s}, \quad (16)$$

где множители $1/a_s$ при квадратах канонических определяются согласно

$$a_s = \frac{\partial X_s}{\partial Y_s} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{U}_{18-s+1}}{\partial Y_s^2} \quad (s = 1, \dots, 18; \text{ по } s \text{ не суммируется}). \quad (17)$$

В последнем соотношении суммирование по повторяющемуся индексу s не производится.

Ненулевые компоненты матрицы перехода [T] вычисляются через определяющие механические модули согласно формулам:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= A + A, & T_{12} &= T_{13} = A, & T_{17} &= \frac{1}{2}(A + A), & T_{18} &= T_{19} = \frac{1}{2}A, \\
T_{22} &= \frac{A(2A + A)}{A + A}, & T_{23} &= \frac{AA}{A + A}, & T_{27} &= \frac{AA - AA}{2(A + A)}, \\
T_{28} &= \frac{AA + AA + AA}{2(A + A)}, & T_{29} &= \frac{AA}{2A + 2A}, \\
T_{33} &= \frac{3AA + A^2}{2A + A}, & T_{37} &= \frac{AA - AA}{4A + 2A}, \\
T_{38} &= \frac{AA - AA}{4A + 2A}, & T_{39} &= \frac{2AA + AA + AA}{2(2A + A)}, \\
T_{44} &= T_{55} = T_{66} = 2A, & T_{410} &= T_{510} = T_{610} = A, \\
\\
T_{77} &= \frac{12AAA + 12AAA - 2AA^2 + 4AA^2 + 4A^2A - 3AA^2 - 2AAA - AA^2}{4A(3A + A)}, \\
T_{78} &= \frac{12AAA + AA^2 + 4AA^2 - 3AA^2 - 2AAA}{4A(3A + A)}, \\
T_{79} &= \frac{12AAA + AA^2 + 4AA^2 - 3AA^2 - 2AAA}{4A(3A + A)}, \\
\\
T_{88} &= \frac{(4AA - A^2) \left(24AAA + 12AAA - AA^2 + 8AA^2 + 4A^2A - 6AA^2 - 4AAA - AA^2 \right)}{4A \left(12AAA + 12AAA - 2AA^2 + 4AA^2 + 4A^2A - 3AA^2 - 2AAA - AA^2 \right)}, \\
T_{89} &= \frac{(4AA - A^2) \left(12AAA + AA^2 + 4AA^2 - 3AA^2 - 2AAA \right)}{4A \left(12AAA + 12AAA - 2AA^2 + 4AA^2 + 4A^2A - 3AA^2 - 2AAA - AA^2 \right)}, \\
T_{99} &= \frac{(4AA - A^2) \left(36AA + 12AA + 12AA + 4AA - 9A^2 - 6AA - A^2 \right)}{4 \left(24AAA + 12AAA - AA^2 + 8AA^2 + 4A^2A - 6AA^2 - 4AAA - AA^2 \right)},
\end{aligned}$$

$$T_{\underline{10}\underline{10}} = T_{\underline{11}\underline{11}} = T_{\underline{12}\underline{12}} = \frac{4AA - A^2}{2A \frac{3}{3} \frac{4}{4} \frac{8}{8}}, \quad T_{\underline{13}\underline{13}} = T_{\underline{14}\underline{14}} = T_{\underline{15}\underline{15}} = A, \frac{5}{5},$$

$$T_{\underline{13}\underline{16}} = T_{\underline{14}\underline{17}} = T_{\underline{15}\underline{18}} = \frac{1}{2} A, \frac{9}{9}, \quad T_{\underline{16}\underline{16}} = T_{\underline{17}\underline{17}} = T_{\underline{18}\underline{18}} = \frac{4AA - A^2}{4A \frac{5}{5} \frac{6}{6} \frac{9}{9}}.$$

Вычислим далее матрицу $[T]^{-1}$ обратную к матрице перехода $[T]$. Введем обозначение для компонент обратной матрицы по аналогии с визуализацией компонент псевдотензора:

$$T_{(n)}^{[g]\#1\#2\#3}_{k,\dots,h}, \quad (23)$$

где, как и прежде [27, 28], сверху от корневого символа в квадратных скобках указывается алгебраический вес, снизу от корневого символа в круглых скобках указывается ранг, сверху корневого символа вместо $\#1\#2\#3$ указываются матричные операции (например, -1 , $\top$, $\exp$ и т.д.). В нашем случае компоненты обратной матрицы перехода обозначим через T_{kh}^{-1} .

Матрица $[T]^{-1}$ также будет верхнетреугольной, при этом ее ненулевые компоненты выражаются через компоненты матрицы $[T]$ согласно:

$$T_{ss}^{-1} = (T_{ss})^{-1}, \quad (s = 1, \dots, 18; \text{ по } s \text{ не суммируется})$$

$$T_{\underline{12}}^{-1} = -\frac{T_{\underline{12}}}{T_{\underline{11}}T_{\underline{22}}}, \quad T_{\underline{13}}^{-1} = \frac{T_{\underline{12}}(T_{\underline{23}} - T_{\underline{22}})}{T_{\underline{11}}T_{\underline{22}}T_{\underline{33}}}, \quad T_{\underline{23}}^{-1} = -\frac{T_{\underline{23}}}{T_{\underline{22}}T_{\underline{33}}},$$

$$T_{\underline{17}}^{-1} = \frac{T_{\underline{12}}T_{\underline{37}}(T_{\underline{22}} - T_{\underline{23}}) + T_{\underline{12}}T_{\underline{27}}T_{\underline{33}} - T_{\underline{17}}T_{\underline{22}}T_{\underline{33}}}{T_{\underline{11}}T_{\underline{22}}T_{\underline{33}}T_{\underline{77}}},$$

$$T_{\underline{18}}^{-1} = (T_{\underline{12}}(T_{\underline{37}}(T_{\underline{22}} - T_{\underline{23}})(T_{\underline{77}} - T_{\underline{78}}) - T_{\underline{27}}T_{\underline{33}}T_{\underline{78}} + T_{\underline{28}}T_{\underline{33}}T_{\underline{77}}) +$$

$$+ T_{\underline{17}}T_{\underline{22}}T_{\underline{33}}T_{\underline{78}} - T_{\underline{18}}T_{\underline{22}}T_{\underline{33}}T_{\underline{77}})(T_{\underline{11}}T_{\underline{22}}T_{\underline{33}}T_{\underline{77}}T_{\underline{88}})^{-1},$$

$$T_{\underline{19}}^{-1} = (T_{\underline{12}}T_{\underline{89}}(T_{\underline{27}}T_{\underline{33}}T_{\underline{78}} - T_{\underline{28}}T_{\underline{33}}T_{\underline{77}} - T_{\underline{37}}(T_{\underline{22}} - T_{\underline{23}})(T_{\underline{77}} - T_{\underline{78}})) +$$

$$+ T_{\underline{12}}T_{\underline{88}}((T_{\underline{22}} - T_{\underline{23}})(T_{\underline{39}}T_{\underline{77}} - T_{\underline{37}}T_{\underline{78}}) - T_{\underline{27}}T_{\underline{33}}T_{\underline{78}} + T_{\underline{29}}T_{\underline{33}}T_{\underline{77}}) +$$

$$+ T_{\underline{17}}T_{\underline{22}}T_{\underline{33}}T_{\underline{78}}(T_{\underline{88}} - T_{\underline{89}}) + T_{\underline{18}}T_{\underline{22}}T_{\underline{33}}T_{\underline{77}}(T_{\underline{89}} - T_{\underline{88}}))(T_{\underline{11}}T_{\underline{22}}T_{\underline{33}}T_{\underline{77}}T_{\underline{88}}T_{\underline{99}})^{-1},$$

$$T_{\underline{27}}^{-1} = \frac{T_{\underline{23}}T_{\underline{37}} - T_{\underline{27}}T_{\underline{33}}}{T_{\underline{22}}T_{\underline{33}}T_{\underline{77}}},$$

$$T_{\underline{28}}^{-1} = \frac{T_{\underline{23}}T_{\underline{37}}(T_{\underline{77}} - T_{\underline{78}}) + T_{\underline{27}}T_{\underline{33}}T_{\underline{78}} - T_{\underline{28}}T_{\underline{33}}T_{\underline{77}}}{T_{\underline{22}}T_{\underline{33}}T_{\underline{77}}T_{\underline{88}}},$$

$$T_{\underline{29}}^{-1} = (T_{\underline{23}}T_{\underline{39}}T_{\underline{77}}T_{\underline{88}} - T_{\underline{23}}T_{\underline{37}}(T_{\underline{77}}T_{\underline{89}} + T_{\underline{78}}(T_{\underline{88}} - T_{\underline{89}})) + T_{\underline{27}}T_{\underline{33}}T_{\underline{78}}(T_{\underline{88}} - T_{\underline{89}}) +$$

$$+ T_{\underline{28}}T_{\underline{33}}T_{\underline{77}}T_{\underline{89}} - T_{\underline{29}}T_{\underline{33}}T_{\underline{77}}T_{\underline{88}})(T_{\underline{22}}T_{\underline{33}}T_{\underline{77}}T_{\underline{88}}T_{\underline{99}})^{-1},$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{37}^{-1} &= -\frac{T_{37}}{T_{33}T_{77}}, & \bar{T}_{38}^{-1} &= \frac{T_{37}(T_{78} - T_{77})}{T_{33}T_{77}T_{88}}, \\
\bar{T}_{78}^{-1} &= -\frac{T_{78}}{T_{77}T_{88}}, & \bar{T}_{79}^{-1} &= \frac{T_{78}(T_{89} - T_{88})}{T_{77}T_{88}T_{99}}, & \bar{T}_{89}^{-1} &= -\frac{T_{89}}{T_{88}T_{99}}, \\
\bar{T}_{39}^{-1} &= \frac{T_{37}T_{77}T_{89} + T_{37}T_{78}(T_{88} - T_{89}) - T_{39}T_{77}T_{88}}{T_{33}T_{77}T_{88}T_{99}}, \\
\bar{T}_{410}^{-1} &= \bar{T}_{511}^{-1} = \bar{T}_{612}^{-1} = -\frac{T_{410}}{T_{1010}T_{44}}, \\
\bar{T}_{1316}^{-1} &= \bar{T}_{1417}^{-1} = \bar{T}_{1518}^{-1} = -\frac{T_{1416}}{T_{1414}T_{1616}}.
\end{aligned}$$

Новые переменные $X_1, \dots, X_{18}$ вычисляются через старые переменные $Y_1, \dots, Y_{18}$ согласно:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \bar{T}_{11}^{-1}Y_1 + \bar{T}_{12}^{-1}Y_2 + \bar{T}_{13}^{-1}Y_3 + \bar{T}_{17}^{-1}Y_7 + \bar{T}_{18}^{-1}Y_8 + \bar{T}_{19}^{-1}Y_9, \\
X_2 &= \bar{T}_{22}^{-1}Y_2 + \bar{T}_{23}^{-1}Y_3 + \bar{T}_{27}^{-1}Y_7 + \bar{T}_{28}^{-1}Y_8 + \bar{T}_{29}^{-1}Y_9, \\
X_3 &= \bar{T}_{33}^{-1}Y_3 + \bar{T}_{37}^{-1}Y_7 + \bar{T}_{38}^{-1}Y_8 + \bar{T}_{39}^{-1}Y_9, \\
X_4 &= \bar{T}_{44}^{-1}Y_4 + \bar{T}_{410}^{-1}Y_{10}, & X_5 &= \bar{T}_{55}^{-1}Y_5 + \bar{T}_{511}^{-1}Y_{11}, & X_6 &= \bar{T}_{66}^{-1}Y_6 + \bar{T}_{612}^{-1}Y_{12}, \\
X_7 &= \bar{T}_{77}^{-1}Y_7 + \bar{T}_{78}^{-1}Y_8 + \bar{T}_{79}^{-1}Y_9, & X_8 &= \bar{T}_{88}^{-1}Y_8 + \bar{T}_{89}^{-1}Y_9, & X_9 &= \bar{T}_{99}^{-1}Y_9, \\
X_{10} &= \bar{T}_{1010}^{-1}Y_{10}, & X_{11} &= \bar{T}_{1111}^{-1}Y_{11}, & X_{12} &= \bar{T}_{1212}^{-1}Y_{12}, \\
X_{13} &= \bar{T}_{1313}^{-1}Y_{13} + \bar{T}_{1316}^{-1}Y_{16}, & X_{14} &= \bar{T}_{1414}^{-1}Y_{14} + \bar{T}_{1417}^{-1}Y_{17}, \\
X_{15} &= \bar{T}_{1515}^{-1}Y_{15} + \bar{T}_{1518}^{-1}Y_{18}, & X_{16} &= \bar{T}_{1616}^{-1}Y_{16}, & X_{17} &= \bar{T}_{1717}^{-1}Y_{17}, & X_{18} &= \bar{T}_{1818}^{-1}Y_{18}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Отметим еще раз, что физический смысл новых формальных переменных $X_1, \dots, X_{18}$ являются аналогами силовых и моментных напряжений сопряженными с исходными формальными переменными $Y_1, \dots, Y_{18}$, являющимися деформациями и изгибами-кручениями.

Заключение В настоящем исследовании рассмотрены вопросы преобразования энергии деформации гemitропного микрополярного упругого твердого тела к каноническому виду. Энергетическая форма задавалась как линейная оболочка неприводимых квадратичных алгебраических полуизометрических инвариантов. Подводя итог исследования, сформулируем следующие основные выводы:

- (1) Получено изометрически инвариантное А-представление квадратичной формы энергии деформации гemitропного микрополярного упругого

твердого тела, определяемое 9 изоэнтропийными (адиабатическими) механическими модулями, которые в математической модели выступают как произвольные коэффициенты в линейной оболочке неприводимой системы полуизометрических инвариантов.

- (2) Для удобства дальнейшего изложения и упрощения преобразования А-представления энергии деформации введены формальные переменные $Y_1, \dots, Y_{18}$. Обсуждаются различные способы введения формальных переменных.
- (3) Методом отделения полных квадратов Лагранжа квадратичная энергетическая форма приведена к каноническому виду.
- (4) Введено понятие остаточной энергии деформации $\mathcal{U}_{\text{res}}$.
- (5) Получены матрица перехода от исходных формальных переменных $Y_1, \dots, Y_{18}$ к новым (каноническим) $X_1, \dots, X_{18}$ и обратная матрица.
- (6) Предложена новая визуализация псевдотензорных объектов, отражающая матричные операции над ними.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124013000674-0).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124013000674-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E. M. P., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909. VI+226.
2. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383.
3. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. 1960. Т. 2, № 7. С. 1399–1409.
4. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет «внутреннего» вращения // Физика твердого тела. 1960. Т. 5, № 9. С. 2591–2598.

5. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Континуальная теория асимметричной упругости. Равновесие изотропного тела // Физика твердого тела. 1960. Т. 6, № 9. С. 2689–2699.
6. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
7. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964. Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
8. Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / ed. by E. Kröner. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
9. Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
10. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, вып. 3. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
11. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. 3(53). С. 86–100. DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
12. Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
13. Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (Mechanics of generalized continua. Berlin: Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
14. Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore: Springer Verlag, 2017. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
15. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Диагонализация энергетической формы гемитропного тела и система определяющих неравенств. Метод отделения квадратов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2026. Т. 30, № 2. С. 288–307.
16. Мурашкин Е., Радаев Ю. Факторизация характеристического полинома энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. 1(67). С. 113–125. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.008.
17. Мурашкин Е., Радаев Ю. Факторизация характеристического полинома энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. 1(67). С. 159–179. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.021.
18. Радаев Ю., Мурашкин Е. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

19. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
20. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2022. 4(54). С. 108–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
21. Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. 1(55). С. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
22. Krylova E. Y., Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultrasotropic micropolar elastic solids // *Mechanics of Solids*. United States, 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.
23. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
24. Спенсер Э. Теория инвариантов. Мир, 1974.
25. Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред. Санкт-Петербург: Изд-во политехн. ун-та, 2012.
26. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. Russian Federation, 2025. Vol. 46, no. 5. P. 2391–2400. DOI: 10.1134/S1995080225606514.
27. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // *Mechanics of Solids*. United States, 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
28. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.

REFERENCES

1. Cosserat E. M. P., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: A. Hermann et fils, 1909. VI+226.
2. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383.
3. Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Basic Equations of the Theory of Elasticity of Media with Rotational Interaction of Particles // *Fizika Tverdogo Tela*. 1960. T. 2, № 7. С. 1399–1409.
4. Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Continuum Theory of Asymmetric Elasticity. Account of “Internal” Rotation // *Fizika Tverdogo Tela*. 1960. T. 5, № 9. С. 2591–2598.

5. Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Continuum Theory of Asymmetric Elasticity. Equilibrium of an Isotropic Body // *Fizika Tverdogo Tela*. 1960. T. 6, № 9. С. 2689–2699.
6. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
7. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964*. Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
8. Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / ed. by E. Kröner. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
9. Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
10. Radayev Y. N. Multiplier Rule in Covariant Formulations of Micropolar Theories of Continuum Mechanics // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2018. T. 22, вып. 3. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
11. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Two Basic Natural Forms of the Potential of Asymmetric Force-Stress and Couple-Stress Tensors in the Mechanics of Hemitropic Solids // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. 3(53). С. 86–100. DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
12. Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // *Acta Mechanica*. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
13. Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (Mechanics of generalized continua. Berlin: Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
14. Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore: Springer Verlag, 2017. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
15. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Diagonalization of the Energy Form of a Hemitropic Solid and a System of Constitutive Inequalities. Method of Completing Squares // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2026. T. 30, № 2. С. 288–307.
16. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Factorization of the Characteristic Polynomial of the Energy Form of a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2026. 1(67). С. 113–125. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.008.
17. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Factorization of the Characteristic Polynomial of the Energy Form of a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2026. 1(67). С. 159–179. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.021.
18. Radayev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor Formulation of the Mechanics of Hemitropic Micropolar Media // *Problems of Strength and Plasticity*. 2020. T. 82, № 4. С. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

19. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Theory of Linear Hemitropic Micropolar Media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
20. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Reduction of Natural Forms of Hemitropic Energy Potentials to Conventional Forms // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. 4(54). С. 108–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
21. Murashkin E. V. On the Relation Between Micropolar Constitutive Parameters of Thermodynamic State Potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. 1(55). С. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
22. Krylova E. Y., Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultrasotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. United States, 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.
23. Gurevich G. B. Foundations of the Theory of Algebraic Invariants. Moscow–Leningrad: GITTL, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
24. Spencer E. Theory of Invariants. Mir, 1974.
25. Zhilin P. A. Rational Continuum Mechanics. St. Petersburg: Polytechnic University Press, 2012.
26. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. Russian Federation, 2025. Vol. 46, no. 5. P. 2391–2400. DOI: 10.1134/S1995080225606514.
27. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. United States, 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
28. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Polyvariance of the Basic Equations of Coupled Micropolar Thermoelasticity // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.