

Гузов М. А.

УДАЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ПРОБЛЕМЫ ВИЛЛЬЯМСА (1952) НА ОСНОВЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ МОДЕЛИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

Аннотация. В механике сплошной среды хорошо известен факт существования сингулярных решений для компонент поля напряжений в задачах теории упругости о равновесии пластин с угловыми вырезами [1]. Используя функцию напряжений Эйри для плоских конфигураций, которая удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению, Вилльямс построил решение, содержащее сингулярность для поля упругих напряжений. В [1] был предложен асимптотический метод для их исследования в окрестности сингулярности. С другой стороны, в физических теориях прочности [2] также рассматриваются сингулярности полей напряжений и предлагаются способы их удаления. Способы получения регулярных решений сингулярных задач представлены у отечественных и зарубежных исследователей (см., например, [3–5] и ссылки). Тем не менее, для сингулярности Вилльямса такого способа не указано в научной литературе, поэтому целью данной работы является восполнение данного пробела. В связи с изложенным выше возникает необходимость расширения классической теории. Общая идея состоит в отказе от классических условий совместности Сен-Венана, которые идентичны требованию обращения в нуль тензора Римана-Кристоффеля, выражающему условие, что внутренняя геометрия среды является евклидовой. Поэтому обобщение классической теории может быть выполнено на пути перехода к неевклидовой модели. В этом случае компоненты тензора Римана-Кристоффеля становятся дополнительными параметрами модели, характеризующими внутреннюю геометрию материала. В двумерном случае тензор Римана-Кристоффеля определяется единственной компонентой: скалярной кривизной (функция несовместности). При расширении классической теории функция напряжения Эйри удовлетворяет неоднородному бигармоническому уравнению. Показано, что структура полного поля внутренних напряжений складывается из классического поля упругих напряжений и неклассического поля напряжений, определяемого через функцию несовместности. В предположении квадратичной зависимости внутренней энергии среды от термодинамических переменных представлено уравнение для функции несовместности. В полярной системе координат построено решение для функции напряжений Эйри и показано, что поле полных напряжений не содержит сингулярности для всех углов выреза.

Ключевые слова: сингулярные поля напряжений, функция напряжений Эйри, асимптотический метод Вилльямса, неевклидова модель.

Гузов Михаил Александрович, доктор физико-математических наук, академик РАН, профессор, директор ИПМ ДВО РАН; e-mail: guzev@iam.dvo.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9344-154X>; AuthorID: 3404



для цитирования: Гузев М. А. Удаление сингулярности поля напряжений для проблемы Вилльямса (1952) на основе неевклидовой модели сплошной среды // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 2(68). С. 252–256. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.018. EDN: BYJLGJ

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

M. A. Guzev

ELIMINATION OF THE STRESS FIELD SINGULARITY FOR THE WILLIAMS PROBLEM (1952) BASING ON A NON-EUCLIDEAN CONTINUUM MODEL

Institute of Applied Mathematics, FEB RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. In the mechanics of continuous media the existence of singular solutions for stress field components in elasticity problems on the equilibrium of plates with angular notches is well known [1]. Using the Airy stress function for planar configurations, which satisfies the homogeneous biharmonic equation, Williams constructed a solution containing a singularity for the elastic stress field. An asymptotic method for studying these singularities in the vicinity of the singularity was proposed in [1]. On the other hand, physical theories of strength [2] also consider stress field singularities and propose methods for their removal. Methods for obtaining regular solutions of singular problems have been presented by domestic and international researchers (see, for example, [3–5] and references). However, no such method for the Williams singularity has been described in the scientific literature, so the purpose of this work is to fill this gap. Thus the need arises to expand the classical theory. The general idea is to abandon the classical Saint-Venant compatibility conditions, which are identical to vanishing of the Riemann-Christoffel tensor, expressing the condition that the internal geometry of the medium is Euclidean one. Therefore, a generalization of the classical theory can be achieved by transitioning to a non-Euclidean model. In this case, the components of the Riemann-Christoffel tensor become additional model parameters characterizing the internal geometry of the material. We consider the two-dimensional case then the Riemann-Christoffel tensor is defined by a single component: the scalar curvature (the incompatibility function). It is shown that at extending the classical theory, the Airy stress function satisfies an inhomogeneous biharmonic equation. In this case the structure of the total internal stress field consists of a classical elastic stress field and a nonclassical stress field defined by the incompatibility function. Under the assumption of a quadratic dependence of the internal energy of the medium on the thermodynamic variables, an equation for the incompatibility function is presented. A solution for the Airy stress function is constructed in a polar coordinate system, and it is shown that the total stress field is singularity-free for all notch angles.

Keywords: Singular stress fields, Airy stress function, Williams' asymptotic method, non-Euclidean continuum model.

Mihail A. Guzev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician of the Russian Academy of Sciences, Professor, Director of the Institute of Applied Mathematics, FEB RAS; e-mail: guzev@iam.dvo.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9344-154X>; AuthorID: 3404



to cite this article: Guzev M. A. Elimination of the stress field singularity for the Williams problem (1952) basing on a non-Euclidean continuum model // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 2(68). p. 252–256. DOI: 10.37972/chgpu.2026.68.2.018

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. М. А. Гузеву принадлежит проведение исследования, подготовка рукописи и определяющий вклад в содержание статьи.

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. Mihail A. Guzev was solely responsible for conducting the research and preparing the manuscript, and made a defining contribution to the content of the article.

Competing interests. The author declares that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M. L. Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension // Journal of Applied Mechanics. 1952. Vol. 19, no. 4. P. 526–528. DOI: 10.1115/1.4010553. URL: <https://authors.library.caltech.edu/records/2zph7-ee089>.
2. Sinclair G. B. Stress Singularities in Classical Elasticity-I: Removal, Interpretation and Analysis // Applied Mechanics Reviews. 2004. Vol. 57, no. 4. P. 251–297. DOI: 10.1115/1.1762503. EDN: XS0AJS.
3. Васильев В. В., Лурье С. А. Дифференциальные уравнения и проблема сингулярности решений в прикладной механике и математике // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 1. С. 114–127. DOI: 10.15372/PMTF202215157. EDN: DSXG0A.
4. Po G., Lazar M., Admal N. C., Ghoniem N. A Non-Singular Theory of Dislocations in Anisotropic Crystals // International Journal of Plasticity. 2018. Vol. 103. P. 1–22. DOI: 10.1016/j.ijplas.2017.10.003.
5. Parisi K., Konstantopoulos I., Aifantis E. C. Nonsingular Solutions of GradEla Models for Dislocations: An Extension to Fractional GradEla // Journal of Micromechanics and Molecular Physics. 2018.

REFERENCES

1. Williams M. L. Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension // *Journal of Applied Mechanics*. 1952. Vol. 19, no. 4. P. 526–528. DOI: 10.1115/1.4010553. URL: <https://authors.library.caltech.edu/records/2zph7-ee089>.
2. Sinclair G. B. Stress Singularities in Classical Elasticity-I: Removal, Interpretation and Analysis // *Applied Mechanics Reviews*. 2004. Vol. 57, no. 4. P. 251–297. DOI: 10.1115/1.1762503. EDN: XS0AJS.
3. Vasil'ev V. V., Lurie S. A. Differential Equations and the Problem of Solution Singularities in Applied Mechanics and Mathematics // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2023. Vol. 64, no. 1. P. 114–127. DOI: 10.15372/PMTF202215157. EDN: DSXG0A. (in Russian).
4. Po G., Lazar M., Admal N. C., Ghoniem N. A Non-Singular Theory of Dislocations in Anisotropic Crystals // *International Journal of Plasticity*. 2018. Vol. 103. P. 1–22. DOI: 10.1016/j.ijplas.2017.10.003.
5. Parisis K., Konstantopoulos I., Aifantis E. C. Nonsingular Solutions of GradEla Models for Dislocations: An Extension to Fractional GradEla // *Journal of Micromechanics and Molecular Physics*. 2018.